

Wie scharf bleibt eine bewegte Sprungfront?

Richtungsvergleich auf festen, konformen CFK-Bäumen

1. Fragestellung und Modell

Nach dem glatten Profil testen wir eine Unstetigkeit: ein Quadrat mit Wert eins im Inneren und null außen. Die Gleichung bleibt $u_t + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) = 0$. Das exakte Quadrat verschiebt sich ohne Formänderung. Dies ist *kein hydrodynamischer Stoß*: Nichtlinearität, Druck und Schall fehlen weiterhin. Wir untersuchen Verschmierung, Richtungsabhängigkeit, Erhaltung und Bereichsverletzungen.

Der Solver `advection.py` ist unverändert. Wir benutzen dieselben integercodierten Blätter, gemeinsame Kantenflüsse, Least-Squares-Steigungen, Ecksternbegrenzung und SSP-RK2-Stufen wie im vorigen Schritt. Die Vergleichsvariante setzt die Steigungen auf null. Ecknachbarn tragen zur Begrenzung bei, nicht durch zusätzliche Punktflüsse.

2. Geometrisch richtige Anfangsdaten

Seien $c_0 = (0.6, 0.6)$, $a = 0.18$ und

$$n_\theta = (\cos \theta, \sin \theta), \quad q_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta), \quad c(t) = c_0 + 0.5tn_\theta.$$

Das Quadrat ist $Q_\theta(t) = \{x : |(x - c(t)) \cdot n_\theta| \leq a, |(x - c(t)) \cdot q_\theta| \leq a\}$. Anfang und Referenz sind

$$\bar{u}_K(t) = \frac{|K \cap Q_\theta(t)|}{|K|}.$$

Der Schnitt wird durch vier Halbebenen-Clippings berechnet, geometrisch exakt bis auf Gleitkommarundung. Eine Abfrage nur im Zellzentrum würde bereits die Anfangsmasse verfälschen. Die Referenzmasse $4a^2 = 0.1296$ wird bei allen Winkeln bis auf $1.12 \cdot 10^{-16}$ wiedergegeben, ebenso die Anfangsmasse. Clipping dient nur der Referenzintegration, nicht der Nachbarsuche im CFK-Baum.

3. Versuchsplan und Messgrößen

Zwölf Winkel 0, 30, ..., 330 Grad; Basistiefen 8, 10, 12; uniforme und lokal verfeinerte Gitter; zwei Raumansätze: insgesamt 144 Rechnungen. Das lokale Gitter hat zwei zusätzliche Verfeinerungsdurchgänge im Radius 0.22 um c_0 , jeweils mit Konformitätsabschluss. Es wird nicht mitbewegt. Die feinsten Gitter besitzen 4096 bzw. 5110 Blätter.

Die Endzeit $T = 0.5$ entspricht einer Strecke von 0.25. Das exakte Quadrat bleibt für alle Winkel im Wurzelde- reieck; vorgeschriebener Einfluss ist null. Numerische Diffusion kann trotzdem Material an den offenen Rand bringen. Beide Ansätze verwenden je Winkel dieselbe Schrittweite

$$N_t = \left\lceil \frac{T}{0.9\Delta t_{\max}} \right\rceil, \quad \Delta t = T/N_t, \quad \Delta t_{\max} = \min_K \frac{|K|}{3 \sum_e \max(|e| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,e}, 0)}.$$

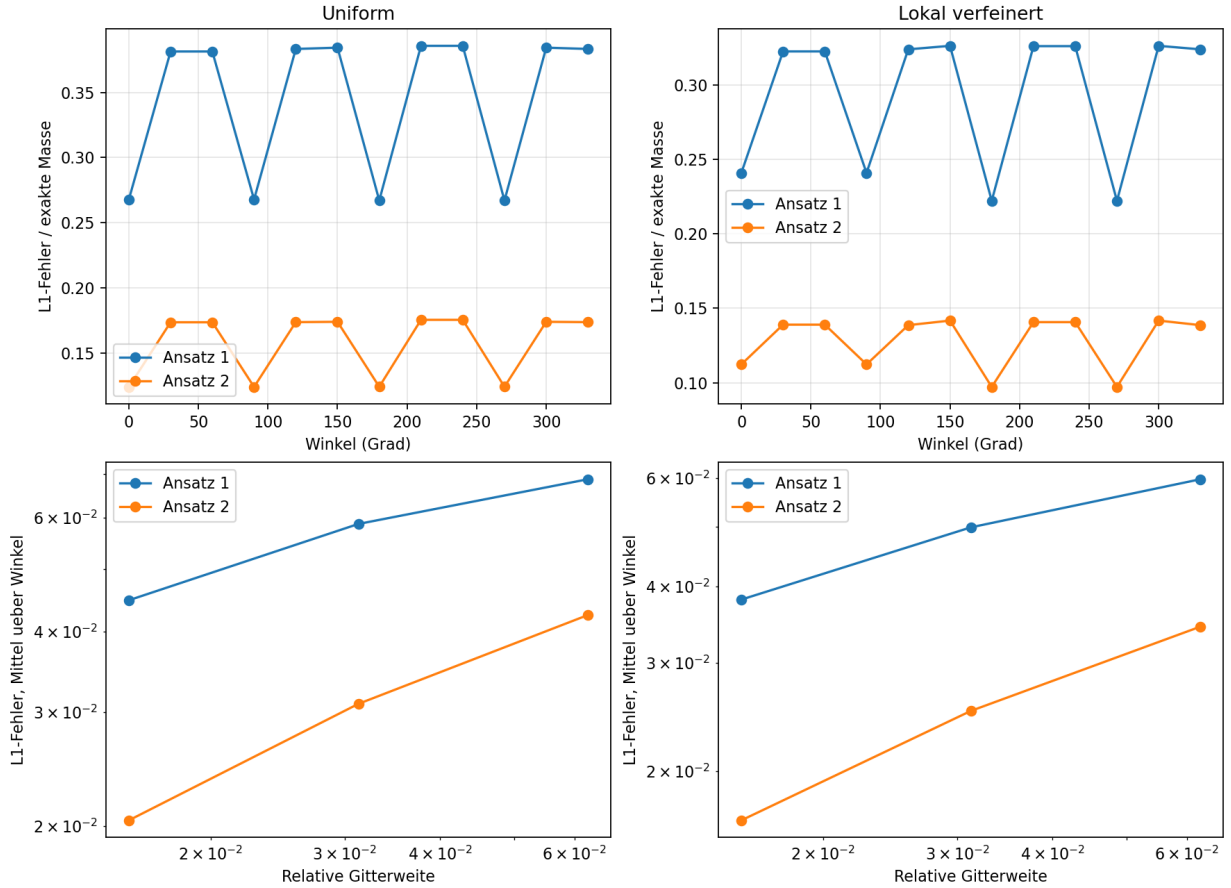
Die Bildspeicherung verändert den Zeitplan nicht. Minima, Maxima und Massenbilanz werden nach *jedem akzeptierten Schritt* gemessen; innere RK-Stufen sind in dieser Extremwertdiagnose nicht enthalten.

Wir messen $E_1 = \sum_K |K| |U_K - \bar{u}_K|$ und $E_2 = (\sum_K |K| (U_K - \bar{u}_K)^2)^{1/2}$. Das sind Zellmittelwertfehler. $E_1/0.1296$ ist ein relativer Fehler; $E_1/(8a)$ eine Fehlerlänge, *keine* direkt gemessene 10–90-Prozent-Frontbreite.

4. Ergebnisse

Gitter	Ansatz	mittleres E_1	relativer Fehler	Ordnung
Uniform	konstant	0.044708	34.50%	0.392
Uniform	linear begrenzt	0.020422	15.76%	0.598
Lokal	konstant	0.038052	29.36%	0.391
Lokal	linear begrenzt	0.016625	12.83%	0.592

Werte für Basistiefe 12, arithmetisch über die zwölf Winkel gemittelt. Die Ordnung ist $\log_2(\langle E_{1,10} \rangle / \langle E_{1,12} \rangle)$. Der lineare Ansatz reduziert den Fehler um Faktoren 2.19 bzw. 2.29. Am Sprung ist dies keine zweite Ordnung wie annähernd im glatten Versuch; die Frontverschmierung dominiert. Das ist nicht allein ein Fehlerindikator für die Implementierung.



Der größte Winkel-Fehler des linearen Verfahrens ist auf dem feinen uniformen Gitter 1.415-mal, auf dem lokalen Gitter 1.458-mal so groß wie der kleinste. Achsenparallele Fälle schneiden hier günstiger ab. Der Versuch dreht jedoch *gleichzeitig Profil und Geschwindigkeit*: Richtung, subzelluläre Lage, Verfeinerungsweg, Zeitfehler und numerischer Randeinfluss sind nicht isoliert. Eine reine Anisotropiekennzahl ist das nicht.

In allen akzeptierten Zuständen aller 144 Läufe gilt numerisch $0 \leq U_K \leq 1$; gemessene Über- und Unterschinger sind null. Es erfolgt kein nachträgliches Abschneiden. Die Randbilanz $M(t) - M(0) + \int F_{\partial\Omega} dt$ schließt auf $1.36 \cdot 10^{-16}$. Der größte integrierte numerische Ausfluss beträgt 0.00345 und ist *kein* Bilanzfehler. Diese Tests ersetzen keinen allgemeinen Stabilitätsbeweis für Gasdynamik.

5. Reproduktion und nächste Entscheidung

Die gesamte zugehörige Testsuite besteht mit 52 Tests. Sechs neue Tests prüfen Schnittflächen, Gesamtmasse und Restriktion, die Lage im Gebiet, Bereichsgrenzen und Bilanz sowie identische Ergebnisse mit und ohne Bildspeicherung. Sie laufen auch aus den archivierten Quellen erfolgreich.

`results.json` enthält alle 144 Datensätze, Parameter, Softwareversionen und SHA-256-Prüfsummen. `source/` enthält die benötigten Quellen. Gitter- und Fall-NPZ-Dateien speichern Codes als Dezimalstrings und numerische Arrays in float64, verlustfrei komprimiert. Die Laufzeiten umfassen Solver-Vorbereitung, Referenzintegration und Zeitintegration, nicht Gittererzeugung, Speichern oder Filmrendering. Dies ist keine dedizierte Performance-Studie.

`jump_transport.mp4` vergleicht konstanten Ansatz, linearen Ansatz und exakte Zellmittelwerte bei 30 Grad auf 4096 Blättern. Jede Filmstufe entspricht einem akzeptierten Zeitschritt. Die weiße Kontur markiert die exakte Quadratgrenze. Zur besseren Sicht ist ein fester Ausschnitt des Wurzeldreiecks dargestellt; er ist keine andere Rechendomäne.

Empfehlung: Vor Euler noch eine kleine Kontrollserie mit verschobenen Startzentren und halbierten Zeitschritten. Damit trennen wir die Richtungsbeobachtung besser von Gitterphase und Zeitdiskretisierung. Anschließend kann auf derselben Kantenstruktur ein erster robuster Euler-Fluss aufgebaut werden. Die vorhandene skalare Begrenzung sollte dabei nicht ungeprüft als Druckpositivitätsgarantie übernommen werden.

Ausführung aus dem archivierten Quellenverzeichnis:

```
python -m unittest -v test_transport_patch
python experiment_transport_patch.py --output NEUES_VERZEICHNIS
```

Voraussetzungen: Python, NumPy, Matplotlib, ffmpeg mit libx264. Die vorige glatte Transportstudie und der Solver bleiben unverändert. Die Methodik schließt an die bereits dokumentierte Rekonstruktion (Bauer 2004, Abschnitt 3.1.2) an; es wird kein neues Hydroverfahren oder bestimmter Algorithmus aus Godlewski/Raviart beansprucht.