

Glatte Extremstellen und der Einfluss des Randes

Rekonstruktionsversuch 5 auf konformen CFK-Bäumen

Forschungsprojekt Pascal Bauer

18. September 2026

1 Fragestellung

Ein Begrenzer soll ungewollte Überschwinger verhindern, darf aber echte glatte Maxima und Minima nicht mit Unstetigkeiten verwechseln. Versuch 4 zeigte gute innere Konvergenz, untersuchte jedoch ein Feld ohne inneres Extremum. Außerdem blieb ein Genauigkeitsverlust am äußeren Rand. Wir prüfen nun beide Punkte getrennt. Alle Zellen bleiben aktive Blätter unseres konformen Integer-Baums; Gradientenschätzung und Ecksternsuche werden nicht verändert. Es gibt keine Zeitintegration.

2 Glatte Referenzfelder

Für $X = x - c_x$, $Y = y - c_y$ und $q = X^2 + \frac{1}{2}XY + 2Y^2$ verwenden wir

$$1 + q, \quad 4 - q, \quad 1 + (X^2 + Y^2)^2, \quad 2 + X^2 - Y^2.$$

Sie besitzen bei $c = (0.61, 0.57)$ ein Minimum, ein Maximum, ein flaches Minimum beziehungsweise einen Sattelpunkt. Zusätzlich testen wir das quadratische Minimum bei $c = (0.5, 0.5)$ auf einer Gitterecke und das Feld $1 + x^2 + \frac{1}{2}xy + 2y^2$ aus den bisherigen Versuchen. Die Daten sind skalare Testfunktionen, keine thermodynamischen Zustände.

Uniforme und lokal adaptive Basistiefen 6, 8, 10, 12, 14 ergeben zusammen mit den sechs Feldern 60 Konfigurationen. Jede wird mit drei Varianten rekonstruiert: unbegrenzt, Eckstern-Begrenzer und Eckstern-Begrenzer mit bekannten Randwerten. Die größten Bäume besitzen 16384 beziehungsweise 20254 Blätter. Die adaptive Auswahl entspricht unverändert Versuch 4.

Zellmittel sind echte Flächenintegrale. Gauß-Legendre-Quadratur mit fünf Punkten je transformierter Koordinate integriert auch das Quadrat des quartischen Rekonstruktionsfehlers exakt bis auf Rundung: Der maximale Grad einschließlich Jacobi-Faktor beträgt neun. Ein Vergleich mit Ordnung sieben sowie ein analytisches Wurzelintegral testen diese Eigenschaft.

3 Was die bekannten Randwerte leisten

An einem äußeren Eckpunkt v erweitern wir die bisherigen Schranken $[L_v, H_v]$ durch die analytische Spur $u(v)$:

$$L_v^* = \min(L_v, u(v)), \quad H_v^* = \max(H_v, u(v)).$$

An inneren Ecken bleiben sie unverändert. Die anschließende Gradientenskalierung erhält weiterhin den Zellmittelwert. Weder die analytischen inneren Gradienten noch innere Punktwerte fließen in die Rekonstruktion ein. Der optionale Parameter `boundary_vertex_values` ist standardmäßig ausgeschaltet; alle bisherigen Aufrufe bleiben gültig.

Dies ist eine Diagnose mit zusätzlicher exakter Information. Die Randspur erweitert nur Schranken; sie wird nicht zwingend exakt rekonstruiert. Diese Anordnung ist weder eine Wand- oder Ausflussbedingung noch eine charakteristische Randbehandlung der Euler-Gleichungen.

4 Auswertung

Auf dem feinsten uniformen Baum mit 16384 Blättern ergeben sich folgende globale Fehler. Die Ordnung vergleicht die beiden letzten Auflösungen.

Feld	Ecksterne: E	Ordnung	mit Randspur: E	Ordnung
Bisheriges Quadratfeld	$8.05 \cdot 10^{-4}$	1.532	$6.98 \cdot 10^{-5}$	2.050
Inneres Minimum	$7.77 \cdot 10^{-4}$	1.521	$6.98 \cdot 10^{-5}$	2.051
Inneres Maximum	$7.77 \cdot 10^{-4}$	1.521	$6.98 \cdot 10^{-5}$	2.051
Flaches Minimum	$7.97 \cdot 10^{-4}$	1.862	$1.31 \cdot 10^{-4}$	2.149
Sattel	$4.64 \cdot 10^{-4}$	1.524	$1.01 \cdot 10^{-4}$	1.930
Minimum auf Gitterecke	$6.67 \cdot 10^{-4}$	1.552	$6.98 \cdot 10^{-5}$	2.053

Im Kerngebiet liegt die letzte Ordnung des begrenzten quadratischen Minimums bei 2.001 (uniform) und 1.972 (adaptiv), beim flachen Minimum bei 1.950 beziehungsweise 1.949. Auch das Sattelfeld erreicht im Kern 2.000 beziehungsweise 1.967. Die Randspur verändert diese Innenwerte nicht. Ein allgemeiner Konvergenzbeweis folgt daraus nicht.

Lokale Abflachung bleibt sichtbar. Beim uniformen quadratischen Minimum ist der Sollwert am Zentrum genau 1. Unbegrenzt erhalten wir 0.9999931369, begrenzt 1.0000635579. Der Begrenzer verhindert hier das Unterschreiten des wahren Minimums, hebt es aber um etwa $6.36 \cdot 10^{-5}$ an. Es werden elf Innenzellen begrenzt. Exakte Randdaten ändern diesen lokalen Befund nicht. Beim flachen Minimum beträgt die entsprechende Anhebung $5.56 \cdot 10^{-9}$.

Die alten Ergebnisse des unveränderten Quadratfeldes wurden gegen Versuch 4 abgeglichen: Ohne den neuen optionalen Randparameter stimmen die globalen Fehler exakt überein. Die größte gemessene Abweichung eines Zellmittelwerts beträgt $3.55 \cdot 10^{-15}$.

Entscheidung: Den Eckstern-Begrenzer beibehalten und den Randparameter als Diagnose kennzeichnen. Die globale Ordnung wird mit Randspur überwiegend wieder etwa zwei, beim Sattelfeld aber noch nicht vollständig erreicht. Es gibt daher keinen Grund, bereits einen universell gelösten Rand oder uneingeschränkte Erhaltung glatter Spitzen zu behaupten.

5 Was wir messen und was nicht

Der L2-Fehler wird mit der Fläche des jeweils ausgewählten Gebiets normiert. Neben dem ganzen Gebiet betrachten wir Innenzellen ohne Randecke und das Kerngebiet mit $x > 0.2$, $y > 0.2$, $x + y < 1.7$ an allen Zellecken. Eine weitere lokale Norm benutzt vollständige Zellen innerhalb Radius 0.2 um das Testzentrum. Bei leerer Auswahl wird kein Zahlenwert erfunden.

Am kritischen Punkt selbst messen wir den größten absoluten Fehler *aller* dort anliegenden Rekonstruktionspolynome. Er ist kein globaler Maximumfehler. Die Lage des Punkts zu den Zellen kann seine beobachtete Ordnung beeinflussen. Lokale Abflachung und globale Konvergenz sind verschiedene Fragen: Ein lokaler Verlust muss die globale zweite Ordnung nicht zerstören.

6 Prüfung und Reproduktion

37 Tests bestehen aus dem archivierten Quellstand. Neu geprüft werden polynomiale Quadratur, affine Exaktheit mit vorgegebenen Randspuren, Zellmittelwerterhaltung, lokale Schranken, unveränderte Innenzellen, Eingabevalidierung und ein Sprung mit 0/1-Randspur. Die bisherigen Baum-, Geometrie- und Begrenzerprüfungen bleiben enthalten.

`results.json` enthält Baumcodes, alle 180 Messzeilen, Parameter, Versionen und SHA-256 des Quellstands. `source/` enthält die Quellen; `minimum_example.npz` zusätzlich ein vollständiges Zellfeld bei uniformer Tiefe 10. Der Aufruf aus dem Berichtsordner lautet:

```
python source/experiment_extrema_boundary.py --output NEUER_ORDNER
```

Der Ausgabeordner muss neu sein. Benötigt werden Python ab 3.10, NumPy und Matplotlib. Die Testanleitung steht in `source/EXTREMA_BOUNDARY.md`. Frühere Ergebnisordner werden nicht verändert.

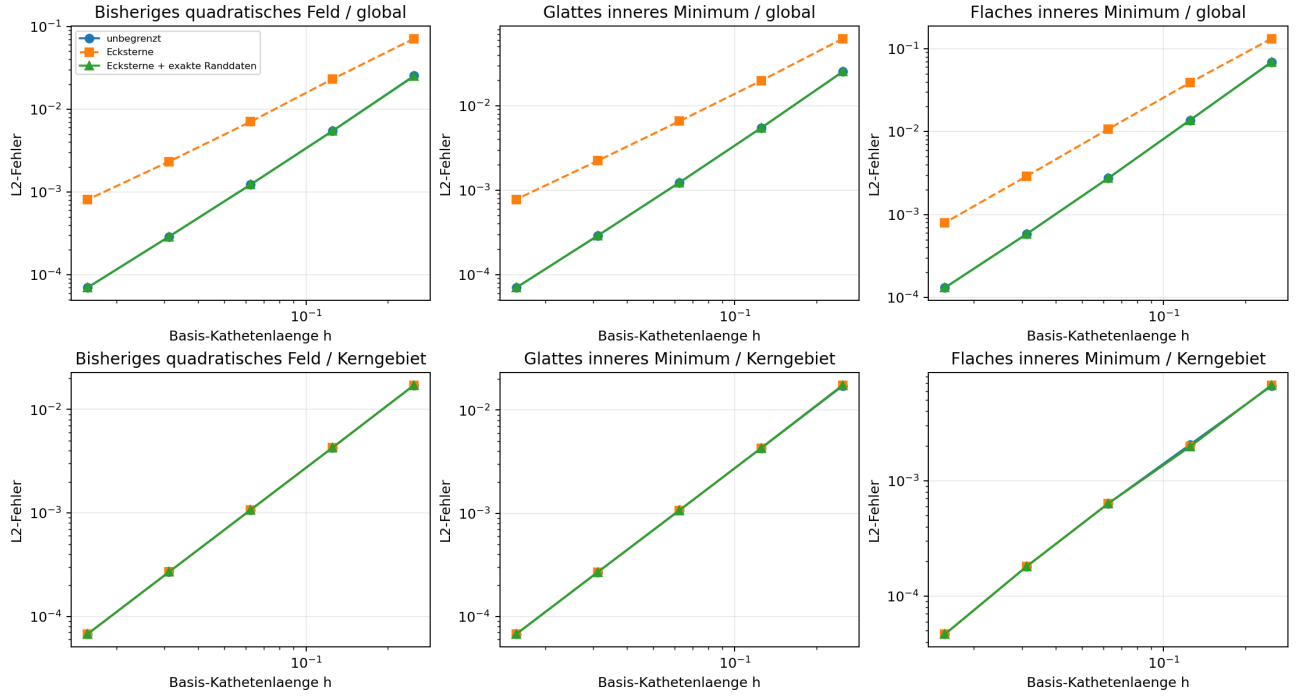


Abbildung 1: Uniforme Serie: globale Fehler oben, Kerngebietsfehler unten. Links das bisherige Feld, mittig ein glattes inneres Minimum, rechts ein flaches inneres Minimum. Exakte Randdaten beeinflussen keine reinen Innenzellen; dort liegen die beiden begrenzten Kurven übereinander.

7 Methodischer Zusammenhang

Die Gradientenschätzung folgt weiterhin dem Least-Squares-Prinzip der Diplomarbeit (Abschnitt 3.1.2). Der skalare Eckstern-Begrenzer skaliert den Gradienten wie in Versuch 4. Die hier hinzugefügte analytische Spur ist eine eigens gekennzeichnete Testanordnung und wird nicht als neue physikalische Literaturmethode ausgegeben.

Als nächster Baustein bietet sich die skalare Advektionsgleichung mit konstanter Geschwindigkeit an. Ihre analytische Transportlösung erlaubt es, Randwerte, Kantenflüsse und Zeitintegration getrennt zu prüfen. Erst dieser Schritt kann Aussagen über zeitliche Stabilität und Transportfehler liefern. Die vorliegenden statischen Tests allein können das nicht und garantieren insbesondere keinen positiven Euler-Druck.