

Ecknachbarschaften auf tiefen CFK-Bäumen

Rekonstruktionsversuch 4: Genauigkeit, Begrenzung und Rand

Forschungsprojekt Pascal Bauer

18. September 2026

1 Fragestellung und Ergebnis

Der vorherige Begrenzer benutzte die Mittelwerte des Gradientenstencils als Schranken für alle drei Ecken eines Dreiecks. Er verhinderte Überschwinger, begrenzte aber auch korrekte lineare Felder. Der neue Versuch ersetzt ausschließlich diese Schranken durch eckspezifische Nachbarschaften. Die Least-Squares-Rekonstruktion bleibt unverändert.

Ergebnis: Auf den untersuchten Gittern bleibt im Inneren die affine Exaktheit bis auf Rundung erhalten. Das quadratische Testfeld erreicht im inneren Kerngebiet wieder etwa zweite Ordnung. An Sprüngen verbleiben Überschwinger nur auf Rundungsniveau. Der äußere Rand begrenzt weiterhin unnötig; deshalb ist die globale Ordnung noch nicht zwei. Dies ist eine Untersuchung skalarer Rekonstruktion, noch kein Hydro-Zeitschritt.

2 Baumgestützte Ecksterne

Die Wurzel hat Code 1 und Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Kinder heißen $2k$ und $2k+1$. Aktive Blätter sind die einzigen unabhängigen Zellen. Für einen geometrischen Eckpunkt v ist

$$\mathcal{S}(v) = \{K : K \text{ ist Blatt und } v \text{ ist Ecke von } K\}.$$

Der Code transportiert das Paar (Blattcode, lokale Ecknummer) über die beiden anliegenden Kanten. Bei gegen den Uhrzeigersinn geordneten Dreiecken kehrt sich die Reihenfolge der gemeinsamen Kantenendpunkte beim Nachbarn um. Die vorhandene Integer-Nachbarsuche und diese Umkehr genügen für den Umlauf. Es gibt keine globale geometrische Suche und keinen Koordinatenvergleich im Umlauf. Exakte rationale Koordinaten dienen nur als unabhängiges Testorakel. Die Ecksterne sind abgeleitete Caches und müssen nach Gitteränderungen neu aufgebaut werden. Flüsse werden dadurch nicht eingeführt: Ein Eckpunkt ist keine zusätzliche Flussaustauschfläche.

3 Konservative Begrenzung

Aus Zellmittel U_K , Flächenschwerpunkt c_K und Gradient g_K wird

$$u_K(x) = U_K + \alpha_K g_K \cdot (x - c_K), \quad 0 \leq \alpha_K \leq 1.$$

Für jede Ecke v setzen wir $L_v = \min_{J \in \mathcal{S}(v)} U_J$ und $H_v = \max_{J \in \mathcal{S}(v)} U_J$. Mit $d_v = g_K \cdot (v - c_K)$ ist

$$\alpha_K = \min \left(1, \min_{d_v > 0} \frac{H_v - U_K}{d_v}, \min_{d_v < 0} \frac{L_v - U_K}{d_v} \right).$$

Leere Minima schränken nicht ein. So erfüllt jede Ecke ihre eigenen Schranken. Wegen der Linearität liegt das Feld im ganzen Dreieck zwischen seinem kleinsten und größten Eckwert. Wegen $\int_K (x - c_K) dx = 0$ bleibt der Zellmittelwert unverändert. Dies ist eine Barth–Jespersen-artige Skalierung mit unserer explizit definierten Eckstern-Nachbarschaft, keine wortgetreue Reimplementation.

Eine hinreichende Bedingung für affine Exaktheit ist, dass v in der konvexen Hülle der Stern-Schwerpunkte liegt. Wir setzen diese Bedingung nicht für beliebige adaptive Gitter voraus, sondern prüfen affine Felder. Am Rand fehlen Zellen außerhalb des Gebiets. Keine analytischen Randwerte werden eingeschleust, um diesen Effekt zu verdecken.

4 Versuchsaufbau

Uniforme Basistiefen sind 6, 8, 10, 12, 14, also bis zu 16384 Blätter. Die adaptive Serie verwendet dieselben Basistiefen und jeweils zwei lokale Verfeinerungspassagen wie Versuch 2: Schwerpunkte im Kreis um (0.6, 0.6) mit Radius 0.22 werden ausgewählt, inklusive Konformitätsabschluss. Der größte adaptive Baum besitzt 20254 Blätter und maximale Tiefe 16. Zusätzlich entsteht ab Code 83 eines Baums der Tiefe 6 durch 16 wechselnde Kindscheidungen ein schmaler Verfeinerungspfad bis Tiefe 22. Dieser Test untersucht lokale Tiefenunterschiede, nicht globale Konvergenz.

Das glatte Feld lautet $u = 1 + x^2 + \frac{1}{2}xy + 2y^2$. Eine auf das Dreieck transformierte Gauß-Legendre-Quadratur mit fünf Punkten je Richtung integriert Zellmittel und quadrierte Rekonstruktionsfehler polynomial exakt, bis auf Rundung. Affine Felder werden unter zwölf Richtungen geprüft. Die Sprungnormalen liegen bei 0, 15, ..., 165 Grad; Schnittpunkte sind (0.65, 0.65), (0.61, 0.67) und (0.70, 0.58). Polygon-Clipping liefert die tatsächlichen Flächenmittel des 0/1-Feldes. Die Sprungserie umfasst 108 Konfigurationen vor dem Vergleich der drei Methoden.

Innenzellen besitzen keine Ecke am physischen Rand. Zusätzlich werden Zellen eines festen Kerngebiets ausgewertet: alle Ecken erfüllen $x > 0.2$, $y > 0.2$ und $x + y < 1.7$. Die Norm ist jeweils

$$E_R = \left(\frac{\sum_{K \subset R} \int_K (u_K - u)^2 dx}{\sum_{K \subset R} |K|} \right)^{1/2}.$$

Bei zwei zusätzlichen Bisektionsstufen halbiert sich die Basislänge. Die beobachtete Ordnung ist $\log_2(E_h/E_{h/2})$. Die ausgewählten Kernzellen approximieren den festen Ausschnitt mit zunehmender Auflösung.

5 Messwerte und Interpretation

Uniform, Tiefe 14	globales E	globale Ordnung	Kern- E	Kernordnung
Unbegrenzt	$6.98 \cdot 10^{-5}$	2.050	$6.72 \cdot 10^{-5}$	2.000
Kantennachbar-Schranken	$7.58 \cdot 10^{-3}$	1.026	$6.41 \cdot 10^{-3}$	1.003
Eckstern-Schranken	$8.05 \cdot 10^{-4}$	1.532	$6.72 \cdot 10^{-5}$	2.000

Auf dem feinsten adaptiven Baum beträgt die Kernordnung mit Ecksternen 1.972, global 1.532. Beim quadratischen Testfeld wird auf beiden feinsten Gittern keine Innenzelle durch den Eckstern-Begrenzer reduziert. Die globale Verschlechterung gegenüber der unbegrenzten Variante entsteht hier durch die Randzellen. Das ist keine allgemeine Aussage für alle Felder.

Die maximale Gradientenabweichung affiner Innenfelder beträgt mit Ecksternen $1.15 \cdot 10^{-14}$ (uniform), $1.78 \cdot 10^{-14}$ (adaptiv) und $2.85 \cdot 10^{-13}$ (lokal Tiefe 22). Kleinere Zellen verstärken den Einfluss von Rundung bei Differenzenquotienten. Diese Werte sind ein numerischer Befund, kein geometrischer Beweis für alle Bäume und Richtungen. Der größte verbleibende Sprungüberschwinger beträgt $2.22 \cdot 10^{-16}$. Die Mittelwertabweichungen liegen auf Rundungsniveau.

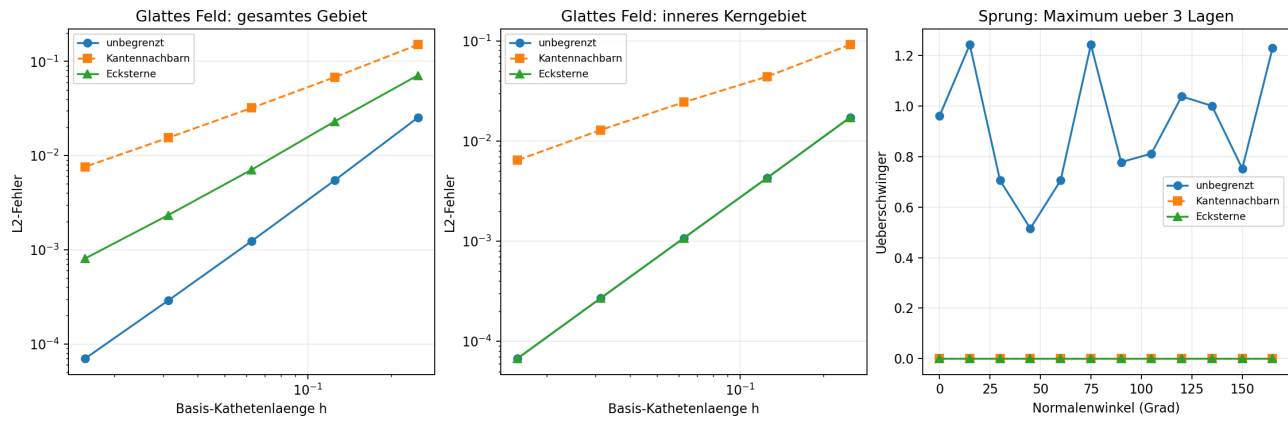


Abbildung 1: Links und Mitte: uniforme Konvergenzserie, global und im Kerngebiet. Die Kurven für unbegrenzt und Ecksterne fallen im Kern zusammen. Rechts: adaptiver Baum mit Basistiefe 10; je Winkel das Maximum über drei Schnittlagen. Beide Begrenzer unterdrücken Überschwinger bis auf Rundung.

6 Prüfung, Reproduktion und nächster Schritt

32 Tests bestanden. Die neuen Tests vergleichen Ecksterne und Randkennzeichnung mit einem unabhängigen rationalen Geometrieorakel, einschließlich der lokal tiefen Variante. Weiter geprüft werden lokale Schranken, Zellmittelwerterhaltung durch unabhängige Quadratur, Idempotenz, unveränderte Eingaben, affine Innenfelder und Eingabvalidierung.

`results.json` enthält alle Messwerte, vollständige Baumcodes, Parameter, Softwareversionen und Quellprüfsummen. Der Ordner `source/` enthält den zugehörigen Quellstand. Python ab 3.10, NumPy und Matplotlib werden benötigt. Aus dem Berichtsordner:

```
python source/experiment_vertex_stars.py --output NEUER_ORDNER
cd source
python -m unittest test_geometry test_tree test_reconstruction \
    test_reconstruction_fields test_reconstruction_limiter test_vertex_stars
```

Der Ausgabeordner muss neu sein. Frühere Versuche werden nicht überschrieben. Die Sternsuche selbst benötigt keine Fließkommageometrie. Die Implementierung ist auf Verständlichkeit, nicht auf Laufzeit optimiert.

Empfehlung: Ecksterne als neue Referenz für die Schranken verwenden. Vor einem Hydro-Zeitschritt eine explizite Randbehandlung festlegen und glatte innere Extremstellen testen. Das vorliegende quadratische Feld hat sein Minimum an einer Gebietsecke und prüft innere Extremstellen nicht. Ghost-Zellen oder passende Randrekonstruktionen sind eigenständige methodische Entscheidungen. Begrenzte Rekonstruktion garantiert noch kein Maximumprinzip nach Zeitintegration und keine positive Euler-Druckentwicklung. Die Winkelserie ist keine vollständige Isotropiestudie.

Literatur

- [1] P. Bauer: *Numerical Simulation of Astrophysical Fluid Flow on CFK-Triangulations*. Diplomarbeit, Universität Zürich, 2004, Abschnitte 3.1.2 und 6.1.2.
- [2] T. J. Barth, D. C. Jespersen: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA 89-0366, 1989. doi:10.2514/6.1989-366.