

Kreisförmige Druckwelle und Sedov-Explosion

Reproduzierbare 2D-Tests auf konformen binären CFK-Bäumen

1 Fragestellung und unveränderter Hydrocode

Nach ebenen Sod-Problemen testen wir radiale Ausbreitung in der Ebene. Die wichtigsten Fragen sind Schockausbreitung, Erhaltung, Positivität und Gitteranisotropie. Selbstgravitation ist ein späteres Ziel, hier aber noch **nicht enthalten**. Der Solver wurde für diese Serie nicht verändert: HLLC, SSP-RK2, P0 oder begrenztes P1 mit baumbasierten Ecksternen, globale CFL-Kontrolle und protokollierte Schutzmechanismen.

Auch uniforme Gitter sind Blätter des bestehenden Integer-Baums im Wurzeldreieck mit Ecken $(0,0)$, $(2,0)$ und $(0,2)$. Lokale Verfeinerung bedeutet zwei bestehende Verfeinerungspässe im Kreis um $(0.6,0.6)$ mit Radius 0.22 und Konformitätsabschluss. Der Baum wird während eines Laufs nicht verändert.

2 Anfangsprobleme

Kreisförmiger Drucksprung: $\rho = 1, p = 1$ innerhalb $r_0 = 0.12$, aussen $\rho = 0.125, p = 0.1$, $v = 0$, Endzeit $t = 0.18$. Die ebene Sod-Lösung ist dafür keine exakte Referenz.

Sedov: $\rho = 1, v = 0$, Umgebungsdruck 10^{-5} , zusätzliche innere Energie $E_0 = 0.1$ pro Längeneinheit in der dritten Richtung, Eintrag in $r_0 = 0.06$, Endzeit $t = 0.5$. Für beide Probleme gelten $\gamma = 1.4$ und Zentrum $(0.6,0.6)$. Der äussere Riemannzustand ist die konstante Umgebung, keine Wand.

Kreis-Dreieck-Schnittflächen werden analytisch aus orientierten Dreiecks- und Kreissektorbeiträgen berechnet. Die Anfangsdaten sind damit Zellintegrale, keine Schwerpunktpuben. Sedovs Energie wird auf die tatsächliche Schnittflächensumme normiert; diese muss πr_0^2 entsprechen.

3 Unabhängige Sedov-Referenz

Die ebene Rechnung entspricht zylindrischer, nicht kugelsymmetrischer Sedov-Geometrie. Mit $x = r/R$, $\rho = \rho_0 G$, $v = \dot{R}V$, $p = \rho_0 \dot{R}^2 P$ gilt

$$\begin{aligned} (V - x)G' + G(V' + V/x) &= 0, \\ R = \beta(E_0 t^2 / \rho_0)^{1/4}, \quad (V - x)V' + P'/G - V &= 0, \\ (V - x)(P'/P - \gamma G'/G) - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Am Schock: $G = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ und $V = P = 2/(\gamma + 1)$. SciPy integriert die ODEs nach innen; das Energieintegral bestimmt β . Eine kleine zentrale Restregion wird mit regulären Asymptoten ergänzt. Referenzkontrolle gegen Tabellen 2,4,5 von Kamm und Timmes (2007), LA-UR-07-2849. Unsere Normierung $\beta^{-4} = 0.9840740169$ unterscheidet sich vom dortigen Tabellenwert 0.984041 relativ um $3.4 \cdot 10^{-5}$; keine Behauptung der Übereinstimmung auf alle Stellen. Eine strengere ODE-/Zentrumsauflösung ändert β im Test um weniger als 10^{-7} .

Die Referenz gilt für eine **Punktexplosion in kalter Umgebung**. Endlicher Eintragsradius und positiver Aussendruck sind Modellabweichungen, insbesondere am Anfang. Deshalb wird ein kleinerer Eintragsradius gesondert getestet und nicht als identisches Anfangsproblem in die Gitterkonvergenz gemischt.

4 Versuchsplan und Messdefinitionen

30 Rechnungen auf dreihemden: beide Probleme auf Tiefen 10,12,14 mit P0/P1 uniform (12); Tiefen 12,14 lokal verfeinert mit P0/P1 (8); zwei verschobene Zentren (0.625, 0.5625), zwei CFL-Halbierungen, vier Filmrechnungen und zwei Sedov-P1-Kontrollen mit $r_0 = 0.03$. Standard-CFL 0.4, Kontrolle 0.2. Standardausgabe: 41 Zustände; Film: 241. Alle Zustände werden als double verlustfrei komprimiert gespeichert. Ausgabezeiten verkürzen Schritte; Filme und Genauigkeitsserie bleiben daher getrennt.

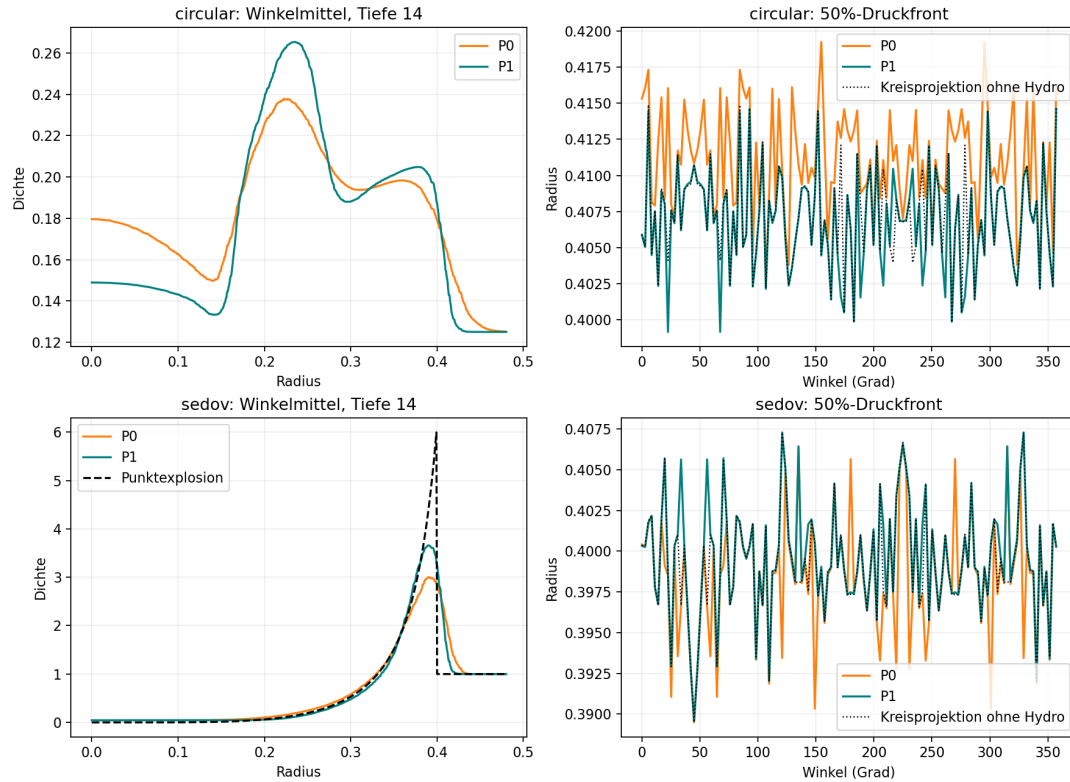
Wir lokalisieren Zellmittelwerte auf 128 Strahlen und 601 Radien bis 0.48. Die Frontdiagnostik ist der äusserste fallende 50-Prozent-Druckdurchgang: bei Sedov relativ zum theoretischen Nachschockdruck, beim Drucksprung relativ zum Maximum des Winkelmittels, jeweils über dem Umgebungsdruck. Winkelvariation: $(\max R - \min R)/\langle R \rangle$. Fehlende Durchgänge bleiben fehlend. Das ist eine messbare Frontkonvention, keine exakte subzelluläre Schockposition; sie enthält Abtastungseffekte. Ein exakt kreisförmiger Indikatorsprung wird deshalb ohne Zeitintegration konservativ auf dasselbe feine Gitter projiziert und identisch abgetastet. Schon diese rein geometrische Kontrolle erzeugt scheinbare Winkelvariation. Die rohe Kennzahl ist **kein isolierter hydrodynamischer Symmetriefehler**.

Alle 30 Rechnungen abgeschlossen, sechs Prozesse auf dreihemden, Laufzeit 17.54 Minuten. 98 lokale Tests bestanden; die acht neuen Radial-/Auswertungstests auch auf dreihemden. Vier kleine Vergleichsläufe unterscheiden sich rechnerübergreifend maximal um $3.01\text{e-}13$. Maximale Bilanzabweichung einschliesslich Randflüssen: $1.53\text{e-}14$. Minimale Dichte 0.015687, minimaler Druck $9.9996\text{e-}06$. Zustandsverwerfungen: 0; CFL-Halbierungen: 6795; HLLC-Rückfälle: 0. Zusätzliche Positivitätsskalierungen: 991882 Zell-Auswertungen (keine Anzahl verschiedener Zellen).

Problem, uniform	Verfahren	Tiefe	Front-Radius	Winkelvariation
Kreis	P0	10	0.43201	16.56%
Kreis	P1	10	0.41544	14.34%
Kreis	P0	12	0.41653	7.19%
Kreis	P1	12	0.40873	8.42%
Kreis	P0	14	0.41117	4.03%
Kreis	P1	14	0.40685	3.81%
Sedov	P0	10	0.37776	18.67%
Sedov	P1	10	0.38919	15.09%
Sedov	P0	12	0.39446	8.83%
Sedov	P1	12	0.39829	9.06%
Sedov	P0	14	0.39849	4.27%
Sedov	P1	14	0.39968	4.43%

Die beiden feinsten Baumvarianten enthalten 16384 bzw. 20254 Zellen. Die Randkontrolle misst $\max |U - U_{\text{amb}}|/(1 + |U_{\text{amb}}|)$ in Randzellen, komponentenweise. Beim groben Kreis-P0-Lauf erreicht sie 0.00334; dieser Lauf darf nicht als randunbeeinflusst gelten. Die feineren P1-Läufe zeigen wesentlich kleinere Werte. Einzelwerte stehen in `summary.json`.

5 Radiale Profile und Gitterausrichtung



Links: Dichte-Winkelmittel der feinsten uniformen Läufe. Rechts: Frontkonvention über den Winkel. P0 orange, P1 grün. Die gepunktete Kurve ist die Kreisprojektion ohne Hydrointegration. Bei Sedov ist die schwarze Referenz die ideale Punktexplosion. Mehr Strahlen erhöhen nicht die räumliche Gitterauflösung.

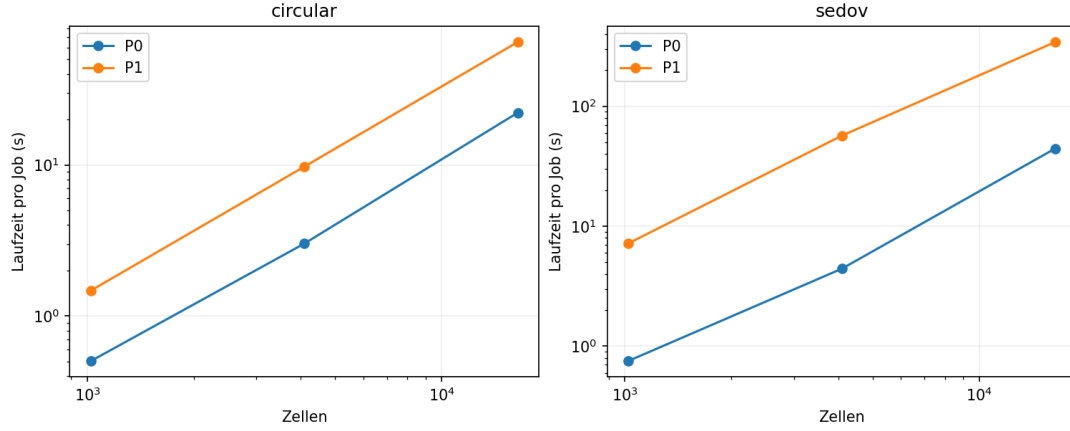
6 Wichtigste Befunde

Der uniforme Sedov-P1-Lauf auf Tiefe 14 liefert einen mittleren Frontradius von 0.39968 gegenüber 0.39923 der Punktreferenz, also +0.112%; P0 liegt bei -0.186%. Der radial gewichtete Dichtefehler des Winkelmittels sinkt von 0.2276 auf 0.1585, um rund 30%. Dies ist ein Vergleich abgetasteter Zellmittel gegen Punktwerte, kein exakter Zellintegralfehler. Die Dichtespitze bleibt deutlich unter dem idealen Wert 6.

Die rohe Winkelvariation beträgt bei Sedov-P1 4.43%, bei der geometrischen Kreisprojektion aber bereits 4.45%. Beim kreisförmigen Drucksprung sind es 3.81% bzw. 3.71%. Die Kennzahl wird hier stark durch die Darstellung in Zellen bestimmt; daraus folgt weder ein entsprechend grosser echter Symmetriefehler noch perfekte physikalische Symmetrie.

Die CFL-Halbierung auf Tiefe 12 ändert den P1-Frontradius beim Drucksprung um etwa $1.94 \cdot 10^{-6}$ und bei Sedov um $1.48 \cdot 10^{-7}$. Räumliche Fehler dominieren diese Diagnostik. Der kleinere Sedov-Eintragsradius verbessert den Endfehler nicht automatisch: auf Tiefe 14 steigt der radiale Dichtefehler leicht auf 0.1607. Ein kleinerer Eintrag verlangt auch feinere Anfangsauflösung. Die lokale zentrale Verfeinerung verbessert hier den Sedov-Dichtefehler nur wenig (0.1581); die späte Schale liegt ausserhalb dieser feineren Region.

7 Laufzeiten und Reproduktion



Einzeljob-Wandzeiten bei konkurrierenden Prozessen, kein isolierter Performancebenchmark. Die feinste lokale Sedov-P1-Rechnung benötigt 973.8 Sekunden und 2403 Schritte. Die globale Schrittweite richtet sich nach der ungünstigsten Zelle; zudem ist die Python-Positivitätsbegrenzung bei starker Explosion aufwendig. Diese Serie optimiert den Code nicht.

Archiv: `results.json`, einzelne Job-JSONs, vollständige NPZ-Zustände, `source` mit SHA-256-Manifest. `summary.json` enthält zusätzlich Prüfsummen aller NPZ-Dateien. Auswertung: `radial_metrics.json`. Die vollständigen Parameter jedes Jobs stehen im vorab gespeicherten Plan.

```
OPENBLAS_NUM_THREADS=1 python experiment_radial.py
-output ../neue_serie -workers 6
python analyze_radial.py ../neue_serie -movies
```

Die Auswertungsskripte sind zusätzlich archiviert. Mathematik und Programmstruktur sind in `RADIAL.md` unabhängig vom Chat erklärt. Die Filme `circular_p0_p1.mp4` und `sedov_p0_p1.mp4` dauern je 12.05 Sekunden. Feste Skalen, keine zeitliche Interpolation; Sedov-Druck und Kreis-Dichtefarbfeld logarithmisch. Sedovs Punktreferenz erscheint im Film erst bei $R \geq 2r_0$, einer pragmatischen Anzeigegrenze. Beim Drucksprung zeigt die schwarze Kurve lediglich den P1-Schnitt bei null Grad, keine exakte Lösung.

8 Einordnung für die weitere Entwicklung

Stabiler Lauf allein bedeutet weder richtige Schockstruktur noch Konvergenz. Die Energie- und Massenbilanz ist unabhängig von der radialen Symmetrie zu bewerten. P1 muss nicht jede Anisotropiemetrik gegenüber P0 verbessern. Für die spätere Selbstgravitation folgen zuerst glatter Wirbel und hydrostatisches Gleichgewicht im vorgegebenen Feld. Erst danach werden Impulsquelle ρg und Energiequelle $\rho v \cdot g$ konsistent gekoppelt. Die physikalische Interpretation der 2D-Gravitation bleibt eine offene Entscheidung.

Diese Serie ist ein Baustein für die geplante wissenschaftliche Gesamtdarstellung, nicht deren vorgezogene Endfassung. Annahmen, Unterschiede zur Referenz und negative Befunde bleiben ausdrücklich dokumentiert.