

Woher kommt der Transportfehler?

288 parallele Kontrollrechnungen auf dreihemden

1. Ziel und unverändertes Modell

Die vorherige Sprungserie zeigte eine Richtungsabhängigkeit. Wir prüfen jetzt, wie viel davon durch Zeitschritt und Anfangslage beeinflusst wird. Modell ist weiterhin die skalare Gleichung $u_t + \nabla \cdot (vu) = 0$, kein hydrodynamischer Stoß. Der Solver `advection.py` mit integerbasierten Nachbarn, gemeinsamer Kantenflussrechnung, Ecksternbegrenzer und SSP-RK2 bleibt unverändert. Alle hier untersuchten Varianten verwenden den linearen Raumansatz.

Das Quadrat hat Seitenlänge 0.36, Geschwindigkeit 0.5 und Endzeit $T = 0.5$. Profil und Geschwindigkeit werden wie zuvor gemeinsam gedreht. Zellmittelwerte der exakten Lösung werden aus geometrischen Schnittflächen berechnet. Das exakte Quadrat bleibt stets strikt im Wurzeldreieck. Einfluss ist null, Ausfluss wird bilanziert; die Gitter bleiben zeitlich fest.

2. Versuchsplan

Auf Basistiefe 12 besitzt das uniforme Gitter die Kathetenlänge $h = 1/32$. Wir verwenden neun Startzentren

$$c_{ij} = (0.6, 0.6) + \frac{h}{3}(i, j), \quad i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Dies ist eine lokale deterministische Stichprobe, keine vollständige Abdeckung aller Gitterlagen. Die lokale Verfeinerungsregion bleibt um $(0.6, 0.6)$ fixiert, wird also nicht mit den Startzentren verschoben.

Teilserie	Läufe	Auswahl
Startlagen	216	2 Gitter, 12 Winkel, 9 Zentren; Tiefe 12
Zeitkontrollen	48	2 Gitter, 4 Winkel, 3 Zentren, 2 Zusatzstufen
Tiefenkontrollen	24	2 Gitter, 4 Winkel, 3 Zentren; Tiefe 14

Die zwölf Winkel sind $0, 30, \dots, 330$ Grad. Die Teilmenge für Zeit und Tiefe ist $0, 30, 120, 210$ Grad mit $(i, j) = (0, 0), (1, 1), (2, 2)$. Die Gitter sind uniform bzw. zweimal lokal im Radius 0.22 verfeinert, jeweils mit Konformitätsabschluss. Maximal werden 20254 Blätter benutzt.

Sei $N = \lceil T / (0.9 \Delta t_{\max}) \rceil$ die bisherige Schrittzahl. Die Zeitkontrollen benutzen *exakt* $N, 2N, 4N$ Schritte, somit $\Delta t, \Delta t/2, \Delta t/4$. Nur der Versuchshelfer erhielt dafür einen ganzzahligen Multiplikator; sein Standardwert 1 erhält das bisherige Verhalten. Zusätzliches Runden bei jeder Zeitschritthalbierung entfällt.

3. Parallele Ausführung und Rechnervergleich

Dreihemden besitzt sechs physische Kerne und zwölf Hardware-Threads. 32 unabhängige Arbeitsaufträge wurden dynamisch auf sechs Prozesse verteilt. Jeder Auftrag umfasst ein Gitter und einen Winkel und verwendet die vorbereitete Rekonstruktion für mehrere Fälle erneut. Numerische Zustände und Summen werden nicht zwischen Prozessen geteilt; die Bearbeitungsreihenfolge ändert daher keine Rechenvorschrift. BLAS-/OpenMP-Threads sind auf eins je Prozess begrenzt.

Die ganze Serie benötigte **43.29 Sekunden**, einschließlich Vorbereitung und Speichern, ohne Übertragung und lokale Auswertung. Es gibt keinen gemessenen seriellen Vergleich, also keine Speedup-Aussage. Auf dem Zielrechner wurden keine Pakete installiert oder bestehende Simulationen verändert.

Ein identischer kleiner Lauf auf beiden Rechnern unterscheidet sich in den Endmittelwerten maximal um $7.77 \cdot 10^{-16}$: Rundungsniveau, aber nicht bytegleich. Remote: Python 3.12.3, NumPy 1.26.4; lokal eine andere Python-/NumPy-Umgebung, vollständig im Archiv protokolliert. Auch die 24 unverschobenen Basisfälle stimmen mit der vorherigen Serie in der L^1 -Kennzahl bis auf $1.22 \cdot 10^{-17}$ überein.

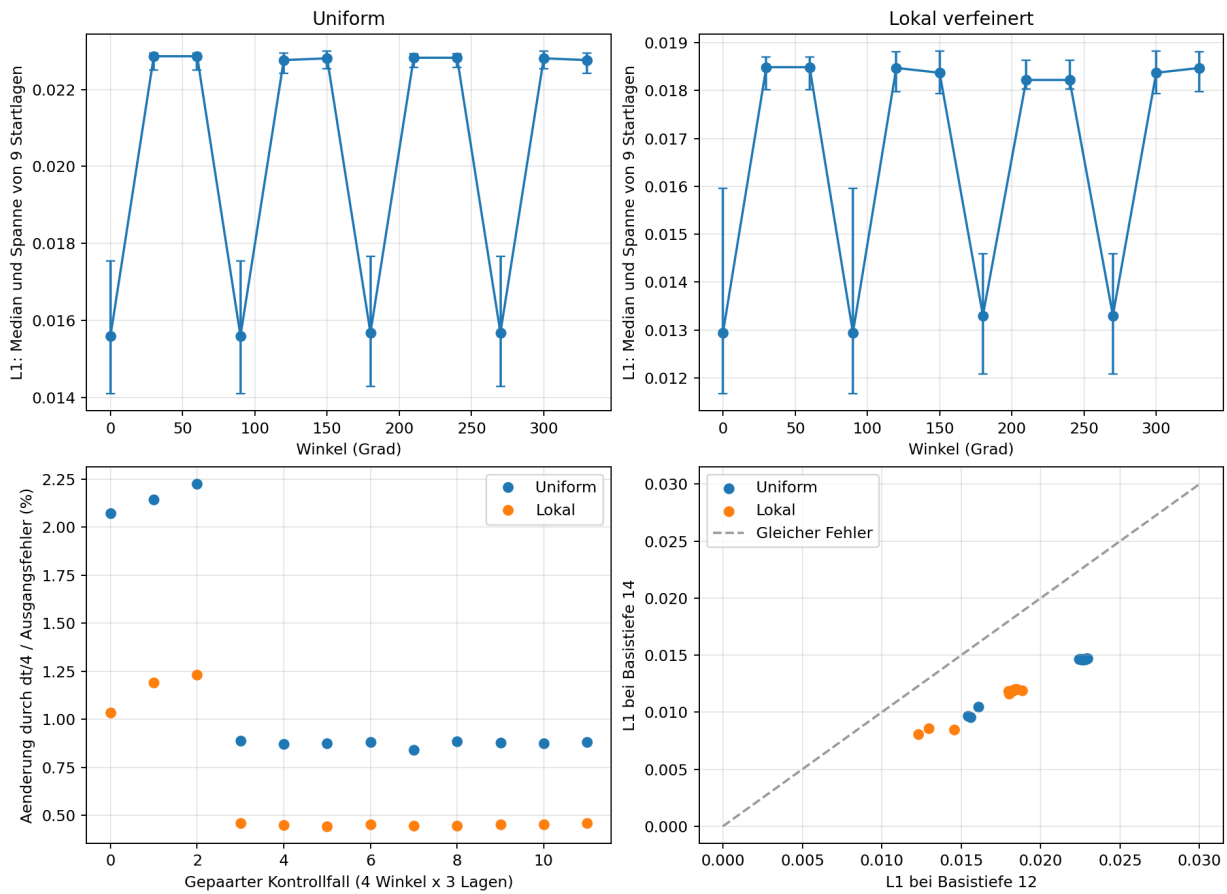
4. Was die Kontrollen zeigen

Wir messen weiterhin $E_1 = \sum_K |K| |U_K - \bar{u}_K|$. **Kleinere Zeitschritte:** Der Lösungsabstand

$$D_t = \frac{\sum_K |K| |U_K^{\Delta t} - U_K^{\Delta t/4}|}{\sum_K |K| |U_K^{\Delta t} - \bar{u}_K|}$$

liegt in den 24 gepaarten Kontrollen bei **0.44–2.22 Prozent**. Das ist ein gemessener Lösungsunterschied, keine rigorose Schranke für den wahren Zeitfehler. Das Verhältnis aufeinanderfolgender Zeitdifferenzen liegt bei 3.986–4.052, konsistent mit zweiter Zeitordnung im untersuchten Bereich. Die große Frontverschmierung verschwindet dadurch nicht.

Startlage und Richtung: Bei festem Winkel beträgt der größte Quotient zwischen schlechtester und bester Startlage 1.245 auf dem uniformen und 1.368 auf dem lokalen Gitter. Nach Medianbildung über neun Startlagen bleibt der Quotient zwischen schlechtester und bester Richtung 1.466 bzw. 1.428. Die Richtungsbeobachtung ist also nicht bloß eine einzelne ungünstige Ausgangslage. Reine Anisotropie ist damit trotzdem nicht isoliert: Gitterphase, Verfeinerungsregion und numerischer Randeinfluss wirken mit.



Oben: Median mit voller Spanne der neun Lagen, *kein Konfidenzintervall*. Unten links: D_t ; Fallindex in der Reihenfolge Winkel und diagonale Lage. Unten rechts: gleicher physikalischer Fall auf Basistiefe 12 und 14. Alle 24 Tiefenkontrollen verbessern E_1 ; die beobachteten Ordnungen $\log_2(E_{1,12}/E_{1,14})$ liegen bei 0.595–0.779. Die CFL verkleinert hierbei auch den Zeitschritt; die separate Zeitkontrolle hilft bei der Einordnung, ist aber keine vollständige Raum-Zeit-Fehlerzerlegung.

5. Absicherung, Archiv und Folgerung

Alle 288 Rechnungen bleiben in den akzeptierten Zuständen zwischen null und eins, ohne nachträgliches Abschneiden. Innere RK-Stufen werden in dieser Extremwertdiagnose nicht erfasst. Der größte Rest der Bilanz $M(t) - M(0) + \int F_{\partial\Omega} dt$ beträgt $1.42 \cdot 10^{-16}$. Damit sind Erhaltung und Bereichsverhalten in dieser Serie unauffällig, nicht allgemein für ein künftiges Gasmodell bewiesen.

54 Tests der zugehörigen lokalen Suite bestehen. Acht relevante Tests bestehen zudem auf dreihenden und erneut aus den zurückgeholten Quellen. Die zwei neuen Kontrolltests prüfen den Versuchsplan und die Gebietslage sowie exakt geschachtelte Zeitgitter und unverändertes Standardverhalten.

series/ Alle Ergebnisse der 288 Läufe, Endzustände als verlustfrei komprimierte float64-Arrays, Codes als Dezimalstrings, Zeitpläne, Softwareversionen und eingefrorene Quellen mit SHA-256.

local_probe/, remote_probe/ Identischer Rechnervergleich mit je eigenem Versions- und Quellenprotokoll.

analysis.json, controls.png Gepaarte Kennzahlen und Diagramme. Die Auswertung prüft Quellen und den Rechnervergleich erneut.

TRANSPORT_CONTROLS.md Eigenständige Anleitung für Versuch, Parallelisierung, Dateiformate und Auswertung.

Folgerung für das weitere Vorgehen: Weitere pauschale Zeitschrittverkleinerung ist derzeit kein sinnvoller Haupthebel. Die räumliche Auflösung und Rekonstruktion bestimmen die Frontschärfe wesentlich stärker. Das skalare Verfahren ist ausreichend kontrolliert, um jetzt einen ersten *robusten 2D-Euler-Prototyp* auf denselben CFK-Kanten aufzubauen.

Der erste Euler-Schritt sollte bewusst einfach bleiben: konservative Zellmittelwerte für Dichte, zwei Impulskomponenten und Gesamtenergie, ideales Gas, zunächst konstante Zustände pro Zelle mit robustem numerischem Fluss. Freie konstante Zustände, Erhaltung, positive Dichte und positiver Druck sowie ein eindimensionales Stoßrohr auf dem Dreiecksgitter sind zuerst zu prüfen. Danach erst die lineare Rekonstruktion übertragen. Die skalaren Garantien gelten nicht automatisch für Druck und Energie. Gravitation und bewegliche Gitter bleiben vorerst ausgeschlossen, damit jeder neue Effekt zugeordnet werden kann.

Reproduktion

Aus **series/source/** (Python, NumPy, Matplotlib):

```
python -m unittest test_transport_patch test_transport_controls
python experiment_transport_controls.py --workers 6 --output NEUER_ORDNER
```

Die Auswertung erfolgt mit dem archivierten **analyze_transport_controls.py** und dem Berichtsordner als Argument. Alle alten Ergebnisordner bleiben erhalten. Der Remote-Lauf ist beendet; es wurde keine dauerhafte oder weitere automatische Rechnung eingerichtet.