

# HLLC im kontrollierten P0-Vergleich

Rusanov, Roe und HLLC auf demselben konformen CFK-Baum

## 1 Methodik und Schutz

Dieser Schritt erweitert ausschliesslich den Kantenfluss. Konstante konservative Zellmittelwerte, Integer-Nachbarn, gemeinsame Kantenbilanz und SSP-RK2 mit CFL-Faktor 0.4 bleiben erhalten. Tatsächliche Schrittweiten können zwischen Flüssen abweichen. Alle Rechnungen sind 2D und ohne Gravitation.

HLLC modelliert zwei äussere Wellen  $S_L, S_R$  und eine Kontaktwelle  $S_M$ . Wir verwenden das Minimum bzw. Maximum der beiden Endpunkt-Akustikwerte und der Roe-gemittelten Akustikwerte als äussere Geschwindigkeiten. Mit  $u_K = \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n}$ ,  $a = \rho_L(S_L - u_L)$  und  $b = \rho_R(S_R - u_R)$  gilt

$$S_M = \frac{p_R - p_L + au_L - bu_R}{a - b}, \quad p_* = p_L + a(S_M - u_L) = p_R + b(S_M - u_R).$$

Die Sternzustände folgen aus den Sprungbedingungen; tangentielle Geschwindigkeiten bleiben seitenspezifisch erhalten. Der Fluss ist  $F_K + S_K(U_{*K} - U_K)$  auf der jeweils relevanten Seite der Kontaktwelle. Bei vollständig einseitigem Wellenfächer gilt direkt der physikalische Upwindfluss. Die Sternformeln sind in `HLLC.md` und `hllc.py` erläutert. Quelle der 1D-Formeln: Clawpack: `euler_hllc_1D`. Unsere 2D-Implementierung verwendet eine etwas breitere äussere Geschwindigkeits-schätzung mit beiden Endpunktpaaren.

Unzulässige Sternzustände, nichtpositiver Sterndruck, ungeordnete Wellen oder numerisch degenerierte Nenner lösen einen protokollierten Rusanov-Rückfall auf der gemeinsamen Kante aus. Die separate Positivitätskontrolle der Zeitstufen bleibt aktiv. Keine Floors, kein allgemeiner Positivitäts- oder Entropiebeweis.

## 2 Versuchsplan und Verifikation

36 Genauigkeitsläufe: Tiefen 8, 10, 12; uniform und lokal verfeinert; Winkel 0 und 30 Grad; drei Flüsse; Endzeit 0.15 mit 31 Ausgabezeiten. Sechs separate Filmrechnungen verwenden Tiefe 12 uniform, Endzeit 0.25 und 201 Zustände. Analytische Aussenranddaten setzen das ebene Sod-Problem diagnostisch fort; dies ist kein geschlossenes Stossrohr. Ausgabezeiten begrenzen Zeitschritte, deshalb Filme und Genauigkeitsläufe getrennt bewerten.

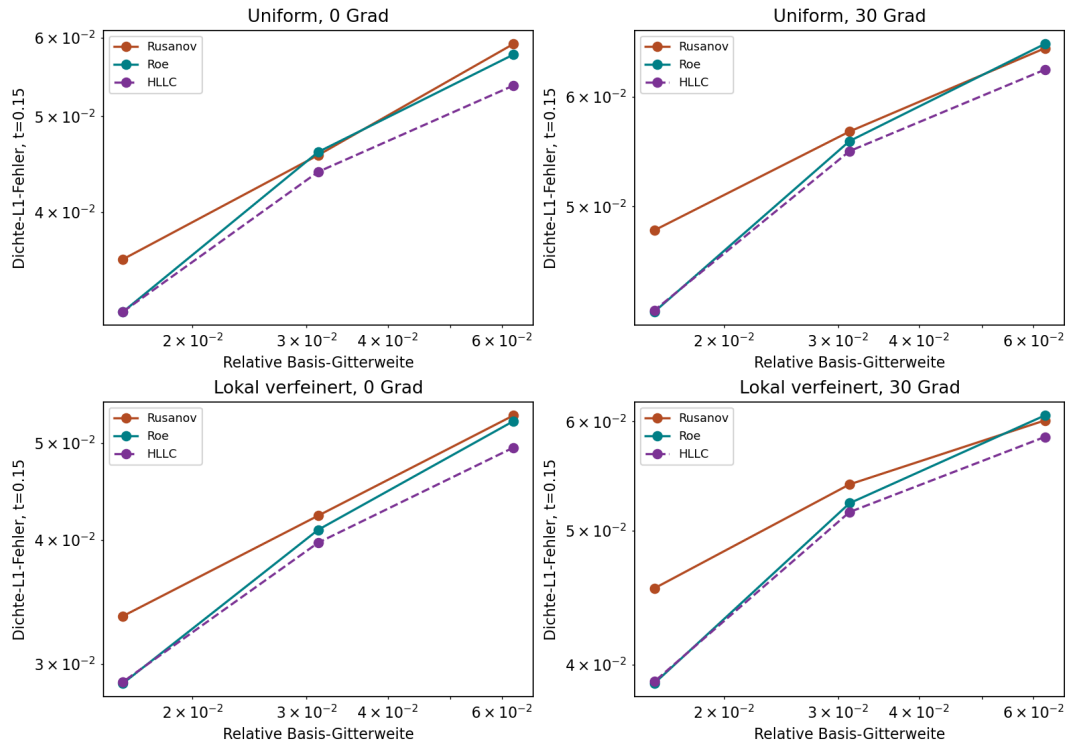
83 Tests lokal, 29 Euler-/Fluss-/Auswertungstests auch auf dreihemden bestanden. Geprüft werden unter anderem Kontakt/Scherung, supersonischer Upwindfluss, Rotation, Antisymmetrie, Wandbilanz, Rückfall sowie geometrische Linienabtastung und Wellenmessung. Ein HLLC-Kontrolllauf unterscheidet sich zwischen Rechnern maximal um  $2.22 \cdot 10^{-15}$ . Alle 28 alten Rusanov-/Roe- Archive sind in allen NPZ-Arrays bitweise reproduziert.

42 Rechnungen auf dreihemden mit sechs Prozessen und einem BLAS-Thread je Prozess: 19.13 Sekunden. Keine statistische Performanceaussage. Minimum angenommener Dichte: 0.125, Druck: 0.1. Keine Flussrückfälle und keine Zustandsverwerfungen in der Sod-Serie; maximale Bilanzabweichung einschliesslich Randflüssen  $1.69 \cdot 10^{-14}$ . Rückfälle werden unabhängig mit einer starken Expansion getestet.

### 3 Feines uniformes Gitter: 4096 Zellen

| Winkel  | Fluss   | Dichte- $L^1$ bei $t = 0.15$ | Stossbreite (10–90%) |
|---------|---------|------------------------------|----------------------|
| 0 Grad  | Rusanov | 0.0358854                    | 0.10005              |
|         | Roe     | 0.0317603                    | 0.09976              |
|         | HLLC    | 0.0317670                    | 0.09363              |
| 30 Grad | Rusanov | 0.0480607                    | 0.10843              |
|         | Roe     | 0.0419626                    | 0.09788              |
|         | HLLC    | 0.0420640                    | 0.09785              |

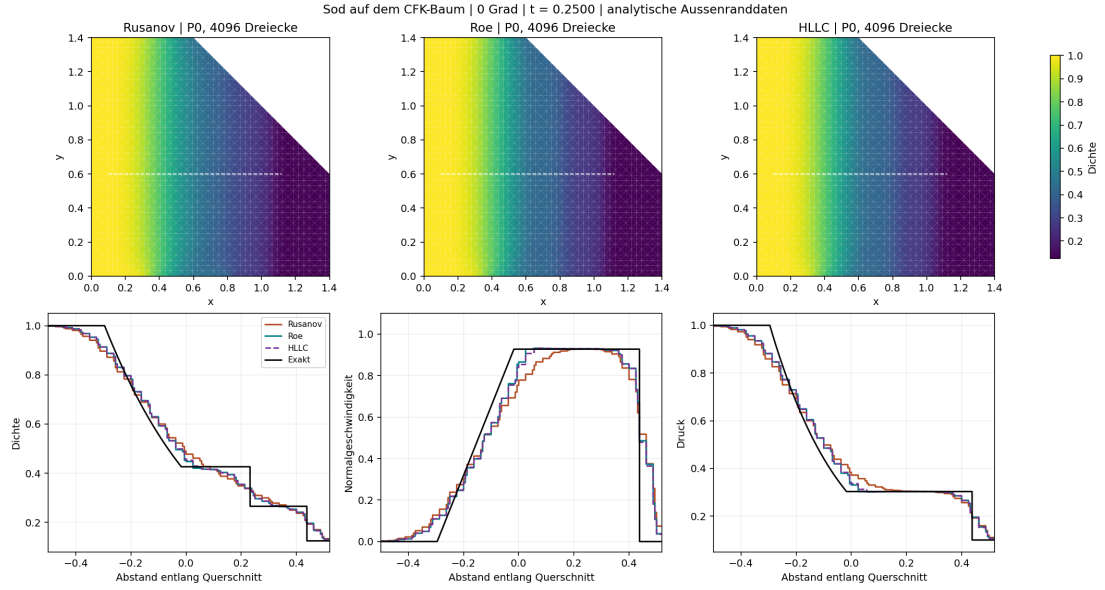
### 4 Einordnung



Der Dichtefehler vergleicht konservative Zellmittelwerte mit exakten Zellintegralen. Zwei Tiefenstufen halbieren die Basis-Längenskala. HLLC und Roe liegen auf den feineren Gittern eng zusammen; ein klarer allgemeiner Sieger ergibt sich aus dieser Serie nicht.

Stossbreiten werden aus Druckschwellen entlang einer geometrisch lokalisierten Linie durch (0.6,0.6) bestimmt. Die Messung bleibt von der Zellgrösse abhängig: viele Abtastpunkte schaffen keine zusätzliche räumliche Auflösung. Die 50-Prozent-Stossposition liegt für alle Flüsse etwa 0.0122 bzw. 0.0185 vor der exakten Position. Kontaktbreiten bleiben als nicht bestimmbar gespeichert, wenn Schwellen im getrennten Wellenfenster fehlen. Verschmierte Kontakt- und Fächerbereiche sind weiter ein Problem.

## 5 Filme und Reproduktion



Die Filme `sod_compare_00.mp4` und `sod_compare_30.mp4` zeigen alle drei Dichtefelder und darunter Dichte, Normalgeschwindigkeit und Druck auf dem markierten Querschnitt. Exakte Punkt-lösung schwarz, HLLC gestrichelt. Je 201 Bilder bei 20 Bildern/s ergeben 10.05 Sekunden. Keine zeitliche Interpolation, feste Skalen; Feldansicht auf  $[0, 1.4]^2$  beschränkt. Komprimierte Trajektorien werden nur einmal geladen.

Quellen und Hashes: `source` und `results.json`; Wellenmessungen: `wave_metrics.json`; Kontrollen: `summary.json`. Der alte Ordner `Hydro_Roe_01` bleibt unverändert. Reproduktion der Darstellung aus diesem Archiv: `python source/analyze_roe.py`. Die ergänzende Zusammenfassung lautet `python summarize_hllc.py`. `../Hydro_Roe_01`. Die ausführliche Startanleitung steht in `HLLC.md`.

**Nächster isolierter Schritt:** begrenzte lineare Rekonstruktion für Euler-Zustände mit Positivitätskontrolle, zuerst glatte Konvergenztests, dann dieselben Sod-Probleme. Diese Serie motiviert das, beweist aber nicht, dass alle verbleibenden Fehler allein von P0 stammen. Gitterorientierung, Randbehandlung und zeitliche Diskretisierung bleiben zu kontrollieren.