

Raumauflösung und Gravitationskopplung

Parameterstudie auf festen konformen Binärbäumen

1 Fragestellung

Wird die Punktmassen-Näherung für die Zellgravitation bei feineren Gittern robuster? Tragen reflektierende Ränder zu den bisherigen Schwierigkeiten bei? Kann ein tief verfeinertes Zentrum einen grossen, grob aufgelösten äusseren Puffer nutzen? Diese Fragen werden getrennt untersucht. Es handelt sich um deterministische Kontrollrechnungen, nicht um unabhängige statistische Wiederholungen.

2 Gemeinsames Modell

Euler-Gas in zwei Dimensionen, Flächenmassendichte Σ , $\gamma = 5/3$, isoliertes geglättetes dreidimensionales Newton-Potential in der Ebene, $G = 1$. Anfangszustand:

$$\Sigma(X) = 10^{-4} + \exp[-|X - (c, c)|^2 / (2 \cdot 0.16^2)], \quad P = 0.1\Sigma, \quad v = 0.$$

Die Zellmittel werden mit einer Duffy-Quadratur aus 8×8 Gauss-Punkten gebildet. HLLC, begrenzte lineare Rekonstruktion mit Ecknachbarn und SSPRK2 bleiben unverändert. Alle Bäume sind während der Rechnung fest. Maximaler physikalischer Zeitschritt 0.001, CFL-Zahl 0.4, 41 Ausgaben bis $T = 0.8$. Gegenüber dem vorigen Diagnosebericht sind Ausgabeabstand und Schrittobergrenze geändert; direkte Vergleiche erfolgen deshalb innerhalb dieser Serie.

Die beiden Potentialvarianten unterscheiden sich durch den optionalen Diagonaleintrag $-Gm_i/\epsilon$, ohne zusätzliche Selbstkraft. Die direkte Energieauswertung berücksichtigt passend dazu $W_{\text{diag}} = W_{\text{off}} - G \sum_i m_i^2 / (2\epsilon)$. Dieser Zusatz bleibt experimentelle Punktquadratur, keine exakte Integration einer ausgedehnten Dreieckszelle.

3 Versuchsplan

- 50 Auflösungsfälle: Tiefen 8 bis 12 (256 bis 4096 Zellen), $\epsilon \in \{0.03, 0.045, 0.06, 0.09, 0.12\}$, beide Potentialvarianten, $c = 0.6$, reflektierender Rand.
- Acht Randfälle: $c = 0.5$, $\epsilon = 0.06$, zwei Gebietsgrössen, reflektierend oder einfacher Outflow, beide Potentialvarianten.
- Vier lokale Gitter: Grundtiefe 8, Zieltiefe 12, Verfeinerungsradien 0.4 oder 0.6 um $c = 0.6$, beide Potentialvarianten. Ein geometrischer Zellpuffer und der Konformitätsabschluss erweitern die Markierungen. Die resultierenden Gitter besitzen 1574 bzw. 2706 Blätter.

Zwei Simulationen laufen gleichzeitig mit je drei Threads auf dreihemden. Der C++-Testlauf dort und drei zusätzliche lokale Python-Geometrietests bestanden. Pro Einzelfall gilt eine Grenze von 600 Sekunden.

4 Gebietsvergrösserung ohne Veränderung der Wolke

Der Solver nutzt weiterhin das kanonische Wurzeldreieck. Mit $X = L(x - c) + c$ und $T = Lt$ gilt

$$\Sigma_{\text{code}} = \Sigma, \quad v_{\text{code}} = v, \quad G_{\text{code}} = LG, \quad \epsilon_{\text{code}} = \epsilon/L, \quad A_{\text{phys}} = L^2 A_{\text{code}}.$$

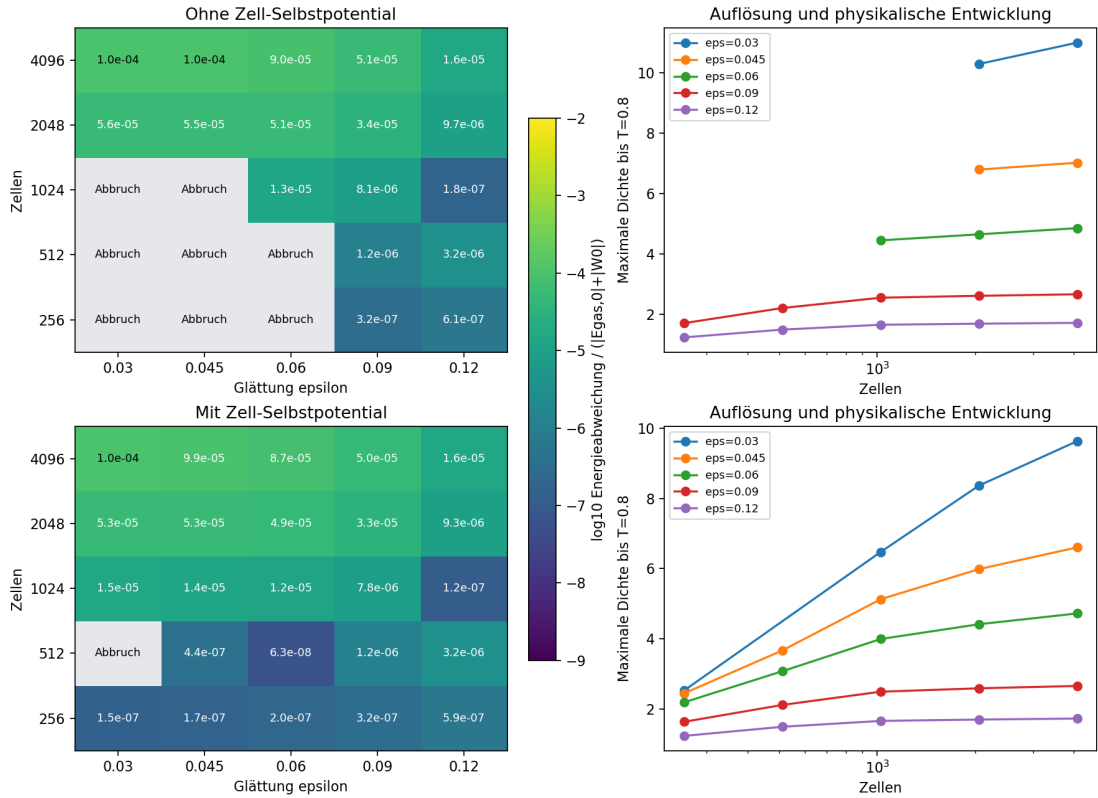
Für $L = 1$ wird Tiefe 10 verwendet, für $L = 2$ Tiefe 12. Die inneren physikalischen Zellschwerpunkte, Flächen und Anfangswerte stimmen laut Test überein. Der minimale Randabstand vom Zentrum steigt von 0.5 auf 1.0. Allerdings kommen eine kleine Hintergrundgasmasse und zuvor abgeschnittene Gausstails hinzu. Dies ist kein vollständig massenidentischer Randvergleich. Der Outflow ist ebenfalls kein exakt reflexionsfreier Rand.

5 Ergebnisse und Interpretation

Die Serie endete nach 444.7 Sekunden: 53 Fälle abgeschlossen, neun kontrollierte Abbrüche. Alle zwölf Rand-/Lokalgitterfälle gelangen. Bei 2048 und 4096 Zellen gelangen alle untersuchten Glättungen mit beiden Potentialvarianten bis $T = 0.8$. Dies stützt die Vermutung, dass höhere Raumauflösung die Kopplung robuster macht. Es beweist weder globale Stabilität noch vollständige Konvergenz. Hydro- und Gravitationsauflösung werden hier gemeinsam verbessert.

Ohne Diagonalterm scheiterten 256 und 512 Zellen bei $\epsilon = 0.03, 0.045, 0.06$ sowie 1024 Zellen bei $0.03, 0.045$. Mit Diagonalterm scheiterte 512/0.03, obwohl 256/0.03 gelang. Eine strikt monotone Robustheit ist damit widerlegt; wechselnde Gitterorientierung und lokale Kopplung bleiben relevant.

Als Dichtevergleich dient die flächengewichtete relative L^1 -Differenz bei $T = 0.8$. Die 4096-Zellen-Rechnung wird vor dem Vergleich exakt über die Integer-Vorfahren auf das jeweilige größere Gitter restringiert. Bei $\epsilon = 0.06$ sinkt die Differenz ohne Diagonale von 13.59 % (1024 Zellen) auf 5.12 % (2048). Mit Diagonale sind es 3.97 % und 2.33 %. Die beiden Folgen haben jeweils ihre eigene Modellreferenz; daraus folgt nicht, dass eine der beiden physikalisch bewiesen genauer ist.



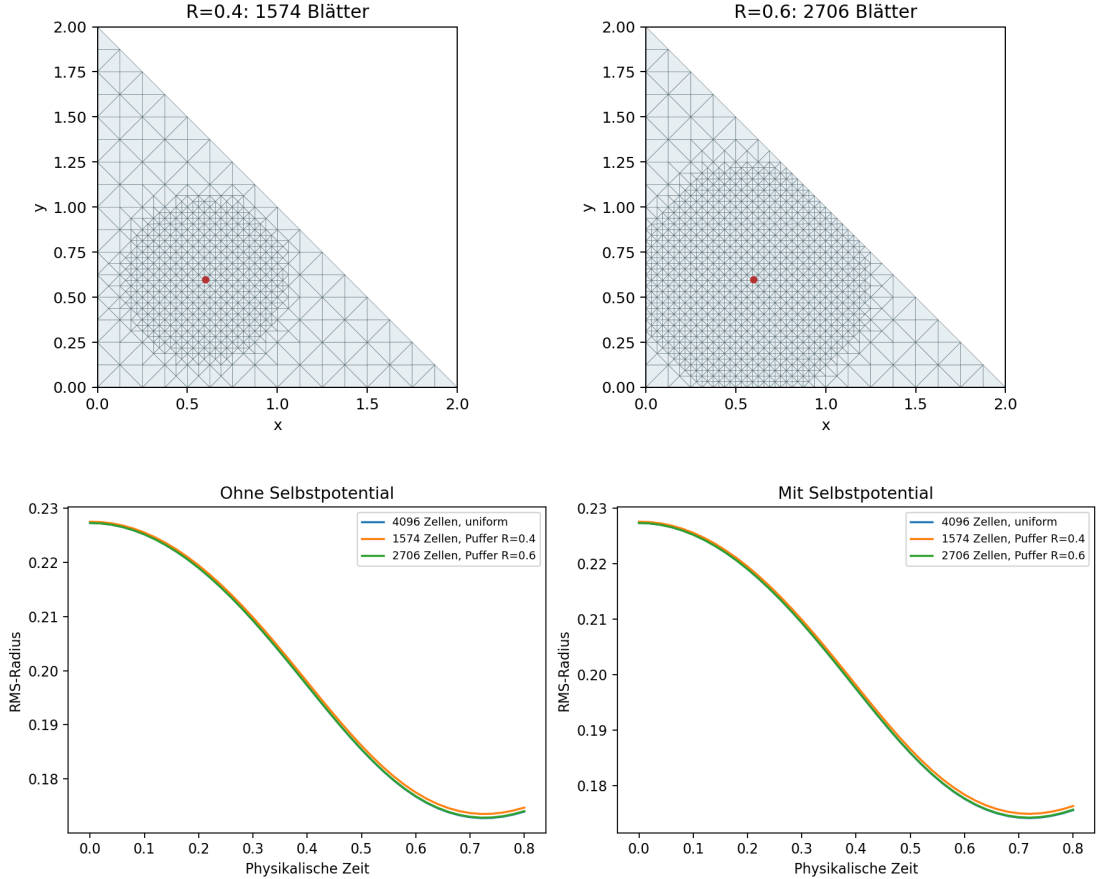
Links Energiebilanz und Abbrüche, rechts maximale Verdichtung. Die Glättung beeinflusst die Entwicklung selbst, nicht nur die numerische Robustheit. Beispielsweise beträgt die maximale Dichte bei 4096 Zellen ohne Diagonale etwa 11.00 für $\epsilon = 0.03$, aber 4.86 für $\epsilon = 0.06$.

6 Lokale Verfeinerung

Alle lokalen Rechnungen gelangen. Gegenüber 4096 gleichmässig feinen Zellen ergeben sich folgende Dichtedifferenzen nach Restriktion:

Blätter	Puffer	ohne Diagonale	mit Diagonale
1574	0.4	0.574 %	0.571 %
2706	0.6	0.0755 %	0.0755 %

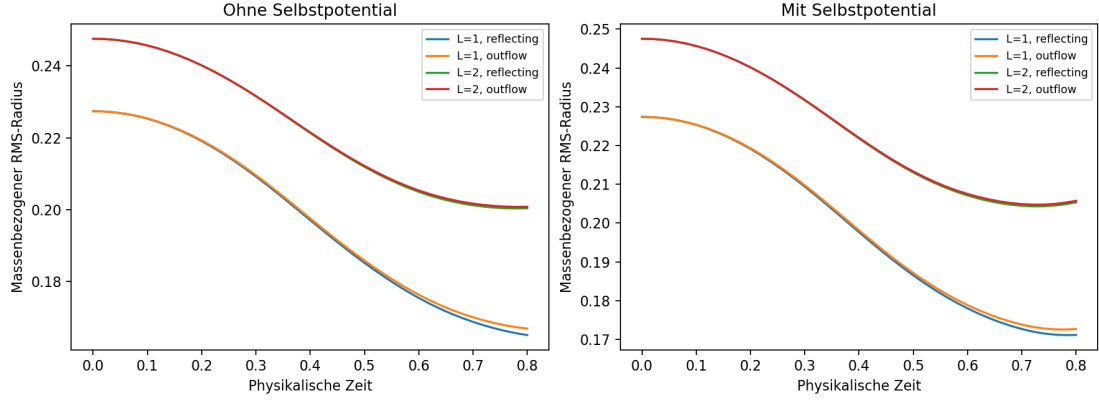
Die gemessenen Rechenzeiten lagen bei etwa 38 % bzw. 66–69 % der uniformen Vergleichsrechnung. Aufgrund gleichzeitiger Prozesse ist das nur eine Orientierung. Der grosse Genauigkeitsgewinn gegenüber uniformen groben Gittern spricht für die gezielte Nutzung des Baumes.



Die feinen zentralen Zellen sind in einen vollständigen konformen Baum eingebettet; die groben äusseren Blätter bleiben Teil der Rechnung.

7 Randeinfluss

Auf denselben inneren Zellen beträgt die Dichtedifferenz zwischen $L = 1$ und $L = 2$ bei reflektierenden Rändern 1.218 % ohne bzw. 1.225 % mit Diagonale. Bei Outflow sind es 2.454 % bzw. 2.411 %. Einfacher Outflow ist also hier nicht automatisch gebietsunempfindlicher. Die Anfangsmasse steigt bei der Vergrößerung von 0.160763 auf 0.161650 (etwa 0.55 %). Die Unterschiede sind daher als kombinierter Gebiets-/Aussenmasseneffekt zu verstehen, nicht als reine Messung reflektierter Wellen.



Der Gesamtradius wird auch durch wenig Gas bei grossem Abstand beeinflusst. Er allein wäre deshalb eine irreführende Diagnose der inneren Wolke. Die zitierten Dichtevergleiche vermeiden diesen unterschiedlichen Auswertungsbereich. Die Ränder sind messbar relevant; die Daten identifizieren sie jedoch nicht als Hauptursache der groben Druckabbrüche.

8 Empfehlung

Für die nächsten Entwicklungstests eignet sich ein lokal vorverfeinerter Baum mit ausreichend grossem Puffer. Vor einer Produktionsentscheidung sollten wir die 4096-Zellen-Vergleichslösung durch mindestens eine feinere Stufe kontrollieren. Parallel bleibt die konsistente Behandlung ausgedehnter Zellmassen samt Selbstenergie offen. Eine nachträgliche Vergrösserung von ϵ allein wäre keine neutrale Reparatur.

9 Reproduzierbarkeit und Grenzen

Eingaben, Fehlertexte, Prüfsummen und erfolgreiche Zustandsfolgen stehen im Unterordner **results**. Der archivierte Quellstand und das getestete Programm erlauben eine Wiederholung; Aufruf siehe README. Die Energienorm ist $\max |E_{\text{gas}} + W - E_{\text{gas},0} - W_0| / (|E_{\text{gas},0}| + |W_0|)$. Bei Outflow ist die Energieänderung wegen offener Ränder nicht als Erhaltungsfehler zu interpretieren. Gute Energiebilanz und positiver Druck beweisen für sich keine genaue physikalische Lösung. Die feinste Rechnung ist eine Vergleichsrechnung, keine exakte Referenz. Gleichgewichtserhaltung, kontinuierliche Zellgravitation und längere Zeiten bleiben separate Aufgaben. Laufzeitquotienten unter gleichzeitiger Rechnerlast sind nur grobe Hinweise, keine Benchmarks.