

Erste selbstgravitierende Gasrechnungen

Feste zweidimensionale CFK-Gitter, Gravitationskopplung und kontrollierte Demonstration

1 Ergebnis in Kürze

Der vorhandene C++-Hydrokern kann jetzt mit dem vorhandenen Gravitationsbaum gekoppelt werden. Analytische Beschleunigung, direkte Kraftvergleiche und Zeitkonvergenz wurden geprüft. Eine selbstgravitierende Scheibe wurde auf 256, 1024 und 4096 Zellen untersucht. **Die Versuchsreihe ist kein uneingeschränkter Stabilitätsnachweis:** Die verbesserte Energieform bricht beim groben 256-Zellen-Scheibentest kontrolliert ab. Die feineren Rechnungen gelingen ohne unzulässige Zustände. Der Film zeigt den bestandenen 4096-Zellen-Fall, nicht den fehlgeschlagenen Versuch.

Die erste Energiequelle verursachte dort etwa 3.47 % Fehler in der unten definierten Energienorm. Eine an die Massenflüsse gekoppelte Arbeit senkt den maximalen Fehler auf 0.00900 %. Diese Verbesserung wurde nicht durch eine nachträgliche globale Energiekorrektur erzielt.

2 Welches zweidimensionale Modell wird gerechnet?

Die Dichte ist eine *Flächenmassendichte* Σ ; Druck P und Gasenergie E sind ebenfalls zweidimensionale, flächenbezogene Grössen. Es gilt

$$U = (\Sigma, \Sigma v_x, \Sigma v_y, E), \quad P = (\gamma - 1) \left(E - \frac{|\Sigma \mathbf{v}|^2}{2\Sigma} \right).$$

Die Scheibe erzeugt ein geglättetes dreidimensionales Newton-Potential, ausgewertet in ihrer Ebene. Dies ist weder die ebene Poisson-Gleichung eines unendlich langen Zylinders noch eine Lane-Emden-Kugel. Die Glättung ist ein Modellparameter; eine konkrete vertikale Scheibenstruktur wird noch nicht daraus rekonstruiert. Diese Unterscheidung ist für quantitative Scheibenrechnungen wesentlich [2].

Die Wurzel hat weiterhin die Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ und Code 1. Tiefe d bedeutet $A_K = 2^{1-d}$; Kinder heissen $2k$ und $2k+1$. Die vorhandenen Integer-Nachbarn und Ecksterne bleiben Grundlage der Hydro-Rekonstruktion. In dieser Untersuchung **ändert sich der Baum nicht**. Gravitation zusammen mit dynamischer Gitteranpassung wird explizit abgewiesen.

Jede Zelle liefert eine Masse $m_K = A_K \Sigma_K$ am Flächenschwerpunkt x_K . Mit festem $\epsilon > 0$ gilt für direkte Wechselwirkungen

$$\mathbf{g}_K = G \sum_{L \neq K} m_L \frac{x_L - x_K}{(|x_L - x_K|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}, \quad \phi_K = -G \sum_{L \neq K} \frac{m_L}{\sqrt{|x_L - x_K|^2 + \epsilon^2}}.$$

Die Diagonale wird ausgelassen. Dies ist eine Schwerpunkt-Näherung, keine analytische Integration ausgedehnter Dreieckszellen. Die zugehörige diskrete Potentialenergie $W = \frac{1}{2} \sum_K m_K \phi_K$ enthält entsprechend keine Zell-Selbstenergie. Bei $\theta = 0$ werden alle Blattwechselwirkungen ausgewertet; bei $\theta > 0$ ersetzt der vorhandene Baum entfernte Gruppen durch Monopole.

3 Kopplung mit den Euler-Gleichungen

Der Hydrooperator bleibt HLLC mit begrenzter linearer Rekonstruktion und SSP-RK2. In *jeder* RK-Stufe wird aus den aktuellen Zellmassen der Kraftbaum aufgebaut; seine Topologie stammt aus dem vorhandenen CFK-Gitter. Beschleunigung und optional Potential werden im gleichen parallelen Baumlaf berechnet. Es gibt kein nur einmal pro Ausgabebild eingefrorenes Kraftfeld.

3.1 Erste Variante: lokale Zellarbeit

Die unmittelbare Diskretisierung der Quellen lautet

$$S_K = (0, \Sigma_K g_{K,x}, \Sigma_K g_{K,y}, (\Sigma \mathbf{v})_K \cdot \mathbf{g}_K).$$

Sie löst den homogenen Beschleunigungstest korrekt. Bei Massentransport auf einem festen Euler-Gitter muss ihre Energiearbeit aber nicht zur diskreten Potentialenergieänderung passen. Diese Inkonsistenz verschwindet nicht durch blosses Verkleinern des Zeitschritts.

3.2 Zweite Variante: Arbeit aus dem Massenfluss

Sei f_{LR} der mit Kantenlänge multiplizierte numerische Massenfluss, positiv von L nach R . Dann wird

$$w_{LR} = f_{LR}(\phi_L - \phi_R)$$

je zur Hälfte den Gasenergien beider Zellen zugeordnet. Die Energiedichte-Quelle erhält jeweils den Faktor $1/A_K$. Die Impulsquelle bleibt $\Sigma_K \mathbf{g}_K$. Für den festen, direkten, symmetrischen Potentialkern K gilt

$$W = \frac{1}{2} m^T K m, \quad \phi = K m, \quad \frac{dW}{dt} = \phi^T \frac{dm}{dt} = - \sum_{LR} f_{LR}(\phi_L - \phi_R).$$

Damit stimmen Kontinuitätsgleichung und Energiearbeit *raumdiskret* überein. Die Herkunft der Energie wird lokal an den Kanten bilanziert. Die Idee einer konsistenten Verbindung von Gravitation und Massenflüssen ist auch in konservativen Verfahren wie [1] zentral; der hier verwendete feste Paarpotentialkern ist jedoch nicht deren Poisson-Verfahren.

Diese Identität garantiert weder exakte Erhaltung bei endlichen RK-Schritten noch positiven Druck. Bei Baumapproximation ist das effektive Potential nicht zwingend ein symmetrischer linearer Operator in den Massen. Alle diese Eigenschaften müssen deshalb separat gemessen werden.

3.3 Zeitschritt, Rand und Diagnosen

Es gilt die akustische CFL-Grenze, ergänzt durch $\Delta t \leq C_{\text{CFL}} \sqrt{\sqrt{A_K}/|g_K|}$ und eine optionale Obergrenze `max_dt`. Stadien mit unzulässigem Zustand werden verworfen und der Schritt halbiert; es gibt keine nachträglichen Dichte-/Druck-Floors. Nach Ausschöpfen der Wiederholungen erfolgt ein Fehlerabbruch.

Die Scheibenrechnungen verwenden reflektierende *Hydro*-Wände am Wurzeldreieck, aber isolierte Gravitation ohne Spiegelmassen. Wände können Impuls übertragen. Bei offenen Rändern müsste zusätzlich der gravitative Energieexport $\phi_K f_{\text{Rand}}$ berücksichtigt werden.

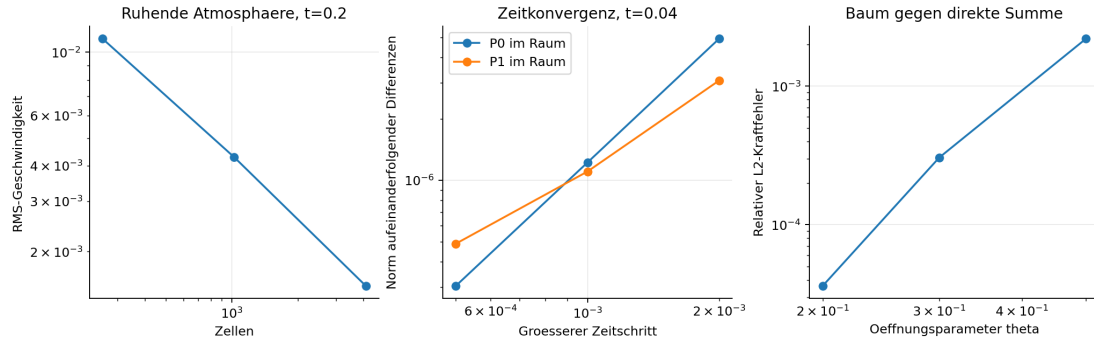
Die Codegrösse `max_balance` prüft die Gasbilanz mit Quellen und Randflüssen. Sie ist **kein** Gesamtenergetest. Dafür wird an allen Ausgabezeiten W unabhängig durch direkte Paarsummation berechnet und

$$\delta_E(t) = \frac{E_{\text{gas}}(t) + W(t) - E_{\text{gas}}(0) - W(0)}{|E_{\text{gas}}(0)| + |W(0)|}$$

angegeben. Die Normierung vermeidet eine fast verschwindende Differenz im Nenner.

4 Prüfungen der Bausteine

1. **Konstante Beschleunigung.** Homogenes Gas mit $\Sigma = P = 1$, $v_0 = (0.1, 0.2)$, $g = (0.2, -0.3)$ bis $t = 0.2$. Exakt ist $v = v_0 + gt$, der Druck bleibt konstant. Maximaler Komponentenfehler: $1.78 \cdot 10^{-15}$.
2. **Hydrostatische Atmosphäre.** $\Sigma = P = \exp(-y)$, $g = (0, -1)$, exakte Aussenwerte, Ende $t = 0.2$. Anfangsmittel entstehen durch Gauss-Duffy-Quadratur mit acht Punkten je Richtung. Die RMS-Störgeschwindigkeit beträgt 0.01116, 0.004288 und 0.001517 bei 256, 1024 und 4096 Zellen. Das Verfahren konvergiert hier, ist aber nicht *well balanced*.
3. **Kraftvergleich.** 256 Zellmassen mit gleichverteilter Zufallsdichte in $[0.1, 2]$, Seed 20260918, $\epsilon = 0.06$. Bei $\theta = 0$ stimmt die Baumkraft bis zur Rundung mit einer unabhängigen Paarsumme überein. Bei $\theta = 0.2, 0.3, 0.5$ liegen die relativen L2-Fehler bei $3.62 \cdot 10^{-5}$, $3.05 \cdot 10^{-4}$ und $2.20 \cdot 10^{-3}$.
4. **Zeitkonvergenz.** Direkte Gravitation, 256 Zellen, Ende $t = 0.04$, Schrittobergrenzen 0.002, 0.001, 0.0005, 0.00025. Mit P0 im Raum ergibt der Vergleich aufeinanderfolgender Lösungen beobachtete Ordnungen 2.013 und 2.007. Mit begrenztem P1 sind es 1.480 und 1.174; hier wird keine saubere Ordnung zwei behauptet. Der erste strengere P1-Pilottest scheiterte. Die Trennung vom Begrenzer wurde danach ausdrücklich eingeführt.



Zusätzlich bestehen die fünf lokalen CTest-Suiten, der Hydrotest ohne OpenMP sowie ASan und UBSan ohne Leckdetektor. LeakSanitizer ist wegen der überwachten Ausführungsumgebung nicht verfügbar. Alle 32 bisherigen Python-C++-Vergleichsfälle ohne Gravitation bestehen weiterhin mit 1/2/4/6 Threads. Native Tests prüfen auch Feld/Potential, die raumdiskrete Energieidentität und identische Ergebnisse der gravitativen Evolution mit einem bzw. vier Threads. Dies ersetzt keine allgemeine Fehlerfreiheit.

5 Scheibenversuche und Film

Alle Grössen sind dimensionslos. Anfangs gilt

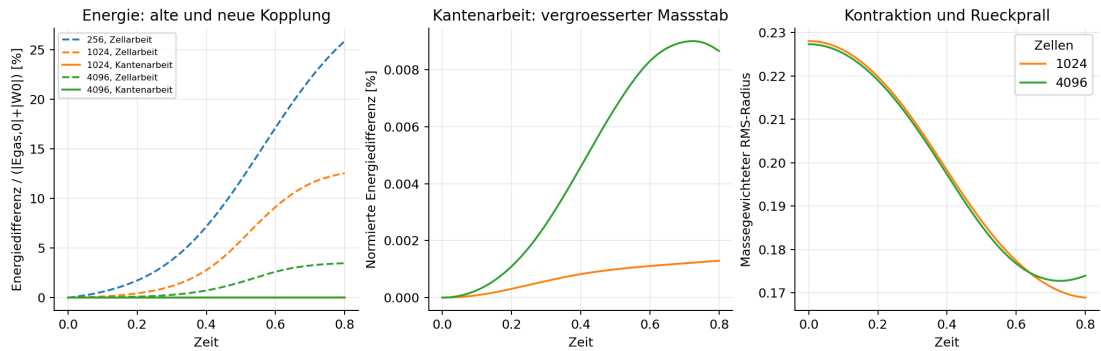
$$\Sigma(x) = 10^{-4} + \exp\left(-\frac{|x - (0.6, 0.6)|^2}{2(0.16)^2}\right), \quad P = c_0^2 \Sigma, \quad v = 0, \quad \gamma = 5/3.$$

Die spätere Evolution ist adiabatisch, *nicht* isotherm. Hauptserie: $c_0^2 = 0.10$, $G = 1$, $\epsilon = 0.06$, $\theta = 0.3$, $C_{\text{CFL}} = 0.4$, $\Delta t_{\text{max}} = 0.002$. Ende $t = 0.8$, 161 Ausgaben. Zusätzlich: $c_0^2 = 0.30$, direkte Gravitation und halbierte Schrittobergrenze. Die Masse ist auf allen Auflösungen etwa 0.1609884.

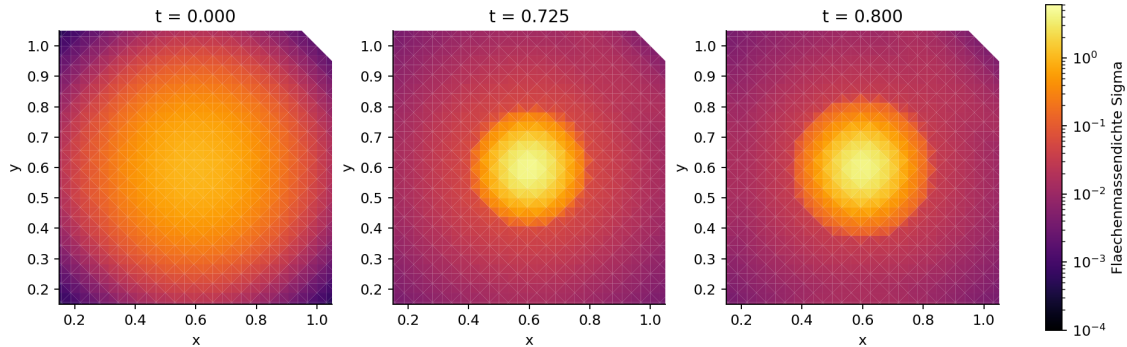
Fall	Zellen	max. $ \delta_E $	native Zeit [s]
Zellarbeit	256	$2.586 \cdot 10^{-1}$	0.32
Zellarbeit	1024	$1.254 \cdot 10^{-1}$	1.91
Zellarbeit	4096	$3.468 \cdot 10^{-2}$	21.50
Kantenarbeit	256	Abbruch: kein zulässiger Schritt	
Kantenarbeit	1024	$1.295 \cdot 10^{-5}$	1.94
Kantenarbeit	4096	$9.005 \cdot 10^{-5}$	21.98
Kantenarbeit, $\theta = 0$	1024	$7.812 \cdot 10^{-9}$	4.06
Kantenarbeit, halbes Δt_{max}	4096	$9.005 \cdot 10^{-5}$	19.18
Kantenarbeit, höherer Druck	4096	$1.700 \cdot 10^{-5}$	64.76

Die Laufzeiten sind Einzelmessungen, keine belastbare Skalierungsstudie. Der feinere Lauf mit kleinerer Schrittobergrenze ist etwas schneller, weil weniger CFL-Versuche verworfen werden (0 statt 399), obwohl 800 statt 726 Schritte akzeptiert werden. Dies ist keine allgemeine Aussage über kleinere Schritte.

Die Energiefehler der Baumvariante sind nicht monoton mit Zellzahl. Die Direktkraftkontrolle und der kaum veränderte Fehler bei kleinerem Zeitschritt sprechen hier für einen wesentlichen Einfluss der Baumapproximation. Der grobe Abbruch zeigt zugleich: Eine konservative Energiequelle ist nicht automatisch positiv. Die genaue lokale Abbruchursache ist noch zu isolieren.



6 Was man in der Animation sieht



Der RMS-Radius des feinen kühleren Falls sinkt von 0.22731 auf 0.17273 bei $t = 0.725$ und steigt bis $t = 0.8$ leicht auf 0.17394. Die maximale Dichte erreicht etwa 4.86. Dies zeigt Kontraktion und beginnenden Rückprall, nicht das Erreichen einer stationären Lane-Emden-Lösung. Der höhere Druck führt zur Expansion auf RMS-Radius 0.43313; wegen des endlichen Dreiecksgebiets sind insbesondere dort Randeinflüsse zu beachten.

Der Film `gasscheibe.mp4` dauert etwa 13.4 Sekunden (161 Bilder, 12 Bilder pro Sekunde). Links: echte Zellmittelwerte auf dem Dreiecksgitter, mit zeitlich fester logarithmischer Farbskala. Rechts: radiales Ringmittel und RMS-Radiusverlauf. Der normierte Energiefehler wird mitgeführt. Die Diagrammkurven sind Diagnosen, keine analytischen Referenzlösungen.

7 Reproduzierbarkeit und Benutzung

Die C++-Rechnungen laufen auf `dreihemden` mit sechs Threads, GCC/C++20, `-O3 -DNDEBUG -ffp-contract=off -fopenmp`, ohne Fast-Math. Es war keine zusätzliche Installation nötig. Die Python-Steuerung verwendet NumPy; Eingaben und Metadaten sind JSON, Zellzustände verlustfreie NPZ-Dateien. Alle Konstanten stehen in den archivierten Eingabedateien.

- `runs/`: erste Zellarbeits-Serie; `flux_runs/`: neue Serie.
Status: `completed_with_failures`. 21 von 22 Fällen abgeschlossen; ein grober Scheibenlauf abgebrochen.
- `cellwork_runs/`: Wiederholung der Zellarbeit mit demselben finalen Binary wie die Kantearbeit, einschliesslich Zusatzkontrollen.
- `results.json` in jedem Ordner: Binary-Hash, Zeiten, Eingabe-Hashes, Fehler und Kennzahlen. `*.input.json`: vollständige Eingaben.
- `source.tar.gz`: Quellstand; `cfk_hydro_run.dreihemden`: verwendetes Remote-Binary. Plattformabhängige Ausführbarkeit beachten.

Aus CFK/CPP:

```
python3 python/experiment_hydro_gravity.py \
--binary build-hydro/cfk_hydro_run --output NEUER_ORDNER \
--threads 6 --demo
```

`--cell-work` wählt die alte Quelle. Die abschliessende Skriptversion schreibt die Wahl explizit als `mass_flux_energy` in jede Eingabe. Bei den ursprünglichen Dateien in `runs/` fehlt dieses Feld noch: Zur Reproduktion mit dem neuen Binary muss es auf `false` gesetzt werden. Die Dateien in `flux_runs/` verwenden bei fehlendem Feld den neuen Standard `true`. Originaldateien wurden nicht nachträglich umgedeutet.

8 Empfohlener nächster Schritt

Zuerst die Positivitätsgrenze der Kantenarbeit untersuchen und eine robuste, lokal konsistente Behandlung entwickeln. Danach Gleichgewichtserhaltung und räumliche Konvergenz verbessern. Erst anschliessend Gravitation mit AMR koppeln: Ein Gitterwechsel ändert auch die diskrete gravitative Energie. Fragmentation, Jeans-Instabilität und quantitative Sternmodelle sind durch diese ersten Tests noch nicht validiert. Der Film ist eine kontrollierte Demonstration des implementierten Scheibenmodells.

Literatur

- [1] P. D. Mullen, T. Hanawa, C. F. Gammie: *An Extension of the Athena++ Framework for Fully Conservative Self-Gravitating Hydrodynamics*. 2020/2021. <https://arxiv.org/abs/2012.01340>.
- [2] T. W. A. Müller, W. Kley, F. Meru: *Treating gravity in thin disk simulations*. A&A 541, A123 (2012). <https://arxiv.org/abs/1203.1413>.