

Lineare Euler-Rekonstruktion aus Baum-Ecksternen

Ein kontrollierter Schritt von P0 nach begrenztem P1

1 Anschauliche Idee

Bisher war jede Zelle innen konstant. Jetzt bekommt jede der vier erhaltenen Grössen eine Ebene: Dichte, zwei Impulse und Energie. Die Ebene muss denselben Zellmittelwert behalten. Ihre Steigung schätzen wir aus umliegenden Zellen, einschliesslich solcher, die nur eine Ecke gemeinsam haben. Ein Begrenzer verhindert zu grosse Ausschläge; ein weiterer Schutz verhindert negative Dichte oder negativen Druck an rekonstruierten Punkten.

Baum und Fluss bleiben getrennte Aufgaben. Integer-Blattcodes und die bestehende Nachbarfunktion bestimmen die gemeinsame Kante. Durch Transport des lokalen Eckindex über inzidente Kanten entsteht der vollständige Eckstern, ohne Koordinatenvergleich. Die Vereinigung der drei Sterne liefert den Gradientenstencil. Ecknachbarn liefern Information, aber keinen direkten Stoffaustausch: Nur Kanten tragen einen Fluss.

2 Mathematische Definition

Für Zelle K mit Schwerpunkt c_K , Mittelwert $\bar{U}_K$ und Komponente a :

$$g_{K,a} = \operatorname{argmin}_{g \in \mathbb{R}^2} \sum_{J \in \mathcal{N}_K} [g \cdot (c_J - c_K) - (\bar{U}_{J,a} - \bar{U}_{K,a})]^2, \quad \mathcal{N}_K = \bigcup_{v \in K} \mathcal{S}_v \setminus \{K\}.$$

Die ungewichtete Ausgleichsrechnung verwendet skalierte Abstände und eine SVD-Pseudoinverse. Bei Rang kleiner zwei gilt $g = 0$; insbesondere ist die einzelne Wurzelzelle zulässig. Stencils und Operatoren werden einmal je unveränderter Topologie gespeichert. Die unbeschränkte Rekonstruktion ist für affine Felder bei vollem Rang exakt.

Am Eckpunkt v gelten komponentenweise die Schranken $m_{v,a} = \min_{J \in \mathcal{S}_v} \bar{U}_{J,a}$ und $M_{v,a} = \max_{J \in \mathcal{S}_v} \bar{U}_{J,a}$. Mit $d_{v,a} = g_{K,a} \cdot (v - c_K)$ wählen wir $\theta_{K,a} \in [0, 1]$ als Minimum der Verhältnisse $(M_{v,a} - \bar{U}_{K,a})/d_{v,a}$ bei $d > 0$ bzw. $(m_{v,a} - \bar{U}_{K,a})/d_{v,a}$ bei $d < 0$, zusätzlich begrenzt auf eins. Danach skaliert ein gemeinsames $\alpha_K \in [0, 1]$ alle vier Steigungen:

$$U_K(x)_a = \bar{U}_{K,a} + \alpha_K \theta_{K,a} g_{K,a} \cdot (x - c_K).$$

Da $\int_K (x - c_K) dx = 0$, bleiben die vier Zellintegrale erhalten. Komponentenweises Begrenzen ist nicht rotationsinvariant im Variablenraum und keine charakteristische Rekonstruktion.

3 Positivität und Zeitintegration

An allen drei Ecken verlangen wir $\rho \geq 10^{-12} \bar{\rho}_K$ und $p \geq 10^{-12} p(\bar{U}_K)$, mit $p = (\gamma - 1)(E - |m|^2/(2\rho))$. Bei Verletzung bestimmen 48 Bisektionsschritte eine sichere gemeinsame Skalierung zurück zum positiven Mittelwert. Der Druck ist auf $\rho > 0$ konkav in U ; die zulässige Menge ist konvex. Positive Eckwerte sichern damit die ganze affine Dreiecksfläche. Die Schwellen verändern keine Mittelwerte und sind keine nachträglichen Floors.

HLLC erhält die beiden rekonstruierten Werte am gemeinsamen Kantenmittelpunkt. Jeder innere Fluss geht mit entgegengesetztem Vorzeichen in seine zwei Zellen ein. SSP-RK2 und die bisherige globale CFL-Schätzung mit Faktor 0.4 bleiben erhalten. Jede RK-Stufe wird geprüft, unzulässige Versuche werden halbiert. Das ist **kein allgemeiner Positivitätsbeweis für die Zeitintegration**. Randdaten werden erst am Fluss angewandt, nicht als zusätzliche Sternzellen. Strenge Sternschranken können selbst affine Felder am Rand beschneiden.

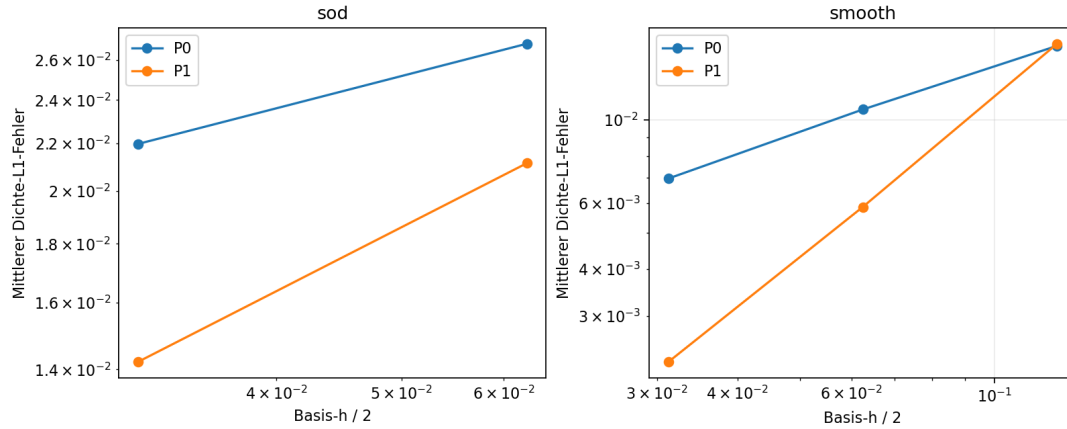
4 Versuchsplan und Ergebnisse

24 Rechnungen lokal auf ephebe, zwei Prozesse mit je einem BLAS-Thread: 36.57 Sekunden reine Versuchsserie ohne Filmerstellung. Python 3.13.9, NumPy 2.2.6. Diese Zeit ist kein systematischer Performancevergleich. 90 Tests bestanden, davon sieben neue Rekonstruktionstests. Geprüft wurden affine Gradienten auf einem tieferen adaptiven Baum, Mittelwerterhaltung, Einfluss reiner Ecknachbarn, Sternschränken, aktive Druckschutz-Skalierung, Wurzel-Rückfall, freie Strömung, Wandbilanz und Sod-Verbesserung. Ein P0-Kontrolllauf reproduziert Zustände und alle alten Logfelder bitweise gegen den archivierten HLLC-Code.

Baum (Basistiefe 10)	Winkel	P0-Fehler	P1-Fehler	Reduktion
uniform	0 Grad	0.0219814	0.0142161	35.3%
uniform	30 Grad	0.0274117	0.0180803	34.0%
lokal verfeinert	0 Grad	0.0198676	0.0116107	41.6%
lokal verfeinert	30 Grad	0.0257928	0.0163048	36.8%

Maximale Bilanzabweichung aller vier Größen einschliesslich Randflüssen: $9.44 \cdot 10^{-15}$. Keine Zustandsverwerfungen, keine HLLC-Rückfälle, keine zusätzlichen Positivitätsskalierungen in dieser Serie; 2082 Halbierungen wegen der zweiten CFL-Stufe. Minimale Dichte 0.1249935, minimaler Druck 0.0999927: winzige Unterschreitungen der anfänglichen Sod-Minima sind vorhanden, aber keine negativen Zustände. Eulersysteme besitzen nicht allgemein ein skalar Maximumprinzip.

Im glatten P1-Test sind die Fehler bei Tiefen 6,8,10 gleich 0.0159737, 0.00586080, 0.00226256. Bei Halbierung der Basislängenskala folgen Ordnungen 1.45 und 1.37, **nicht zwei**. Das grösste P1-Ergebnis ist sogar geringfügig schlechter als P0. Die feinste P1-Rechnung verbessert P0 um 67.6%. Weitere Tests müssen Randbegrenzung, glatte Extrema, Gittergeometrie und zeitlichen Fehler voneinander trennen.



5 Reproduktion und Grenzen

Alle Rechnungen verwenden dasselbe Wurzelndreieck $(0,0), (2,0), (0,2)$, $\gamma = 1.4$ und HLLC. Sod: Tiefen 8 und 10, Winkel 0 und 30 Grad, uniform sowie zwei lokale Verfeinerungspässe um $(0.6, 0.6)$, Endzeit 0.15. Exakte Aussenzustände setzen das ebene Problem diagnostisch fort. Glatter Test: $\rho = 1 + 0.2 \sin(2\pi(x - 0.3t)) \sin(2\pi(y - 0.2t))$, $v = (0.3, 0.2)$, $p = 1$, Tiefen 6,8,10. Zellreferenzen verwenden 5-mal-5-Gaussquadratur; bei Sod geometrisch getrennte exakte Teilintegrale. Der ausgewiesene Fehler ist $\sum_K |K| |\bar{\rho}_K - \bar{\rho}_K^{ex}|/2$, also gegenüber früheren unnormierten Berichten durch zwei geteilt.

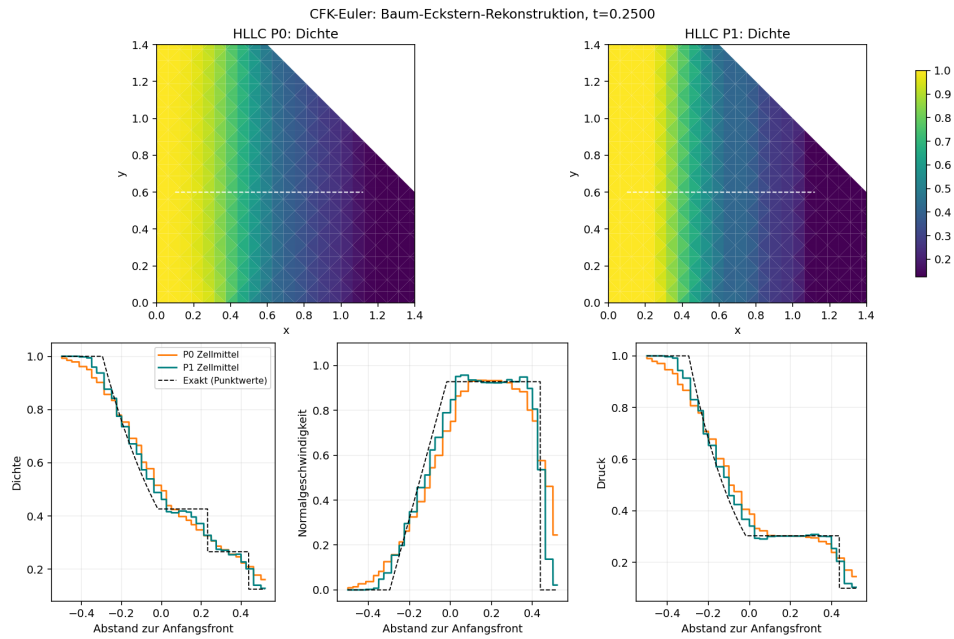
`results.json` enthält Parameter, Laufzeiten, Diagnostik und SHA-256 der archivierten Quellen. Reproduktion aus `source`:

```
OPENBLAS_NUM_THREADS=1 python experiment_euler_linear.py
-output ../neuer_versuch -workers 2

python render_euler_linear.py ../neuer_versuch
```

Keine Zufallsanfangsbedingungen, keine neue AMR-Logik und kein Wechsel des Kantenlösers. Der Vorgängerversuch P1_01 scheiterte an einem doppelten Protokollfeld; nur P1_02 wird ausgewertet. P0 bleibt die Voreinstellung.

6 Zehn Sekunden Anschauung



Der Film `sod_p0_p1.mp4` zeigt 201 Zustände bis $t = 0.25$ bei 20 Bildern/s, also 10.05 Sekunden. Oben stehen Dichtefelder, unten Dichte, Normalgeschwindigkeit und Druck auf $y = 0.6$. Beide numerischen Kurven zeigen abgetastete Zellmittelwerte; schwarz steht die exakte Punktlösung. Das ist eine anschauliche, aber nicht identische Fehlerdefinition zum Zellintegraltest. Die vielen Ausgabezeiten verkürzen Integrationsschritte, weshalb die Filmrechnungen von den Genauigkeitsläufen getrennt sind.

Nächste Kontrollen: feinere glatte Konvergenz, Grenzfalltests mit starker Verdünnung und ein physikalisch zweidimensionaler Test. Eine vollständige zweite Ordnung, allgemeine Schockschärfe oder Eignung für beliebige Euler-Daten ist durch die vorliegende Serie noch nicht bewiesen.