

Erste Euler-Hydrodynamik auf dem CFK-Baum

Konservative Referenz, gedrehte Stossprobleme und Druckpuls

Forschungsprotokoll vom 18. September 2026

1 Ziel und Gitter

Der erste Euler-Schritt soll die Kopplung von Gasdynamik und bestehendem konformen Binärbaum prüfbar machen. Er ist bewusst eine einfache Referenz, noch kein hochauflösendes Produktionsverfahren. Alle Rechnungen sind zweidimensional, dimensionslos und ohne Gravitation.

Das Ursprungsdreieck hat die Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ und den Schlüssel 1. Kinder von k tragen $2k$ und $2k+1$; die Tiefe ist $d = \lfloor \log_2 k \rfloor$, die Fläche $A_k = 2^{1-d}$. Die Blätter sind die unabhängigen Fluidzellen. Der bestehende Integer-Nachbaralgorithmus liefert ihre Kantenbeziehungen; Geometrie und Nachbarn werden für die Rechnung zwischengespeichert. Innere Kanten werden nur einmal verarbeitet. Der Baum bleibt erhalten, wird während einer Rechnung aber nicht verfeinert oder vergrößert.

2 Gleichungen und diskreter Fluss

Gespeichert werden konservative Zellmittelwerte

$$U = (\rho, m_x, m_y, E)^T, \quad \mathbf{m} = \rho \mathbf{v}, \quad p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{|\mathbf{m}|^2}{2\rho} \right), \quad \gamma = 1.4.$$

Für die nach aussen gerichtete Einheitsnormale $\mathbf{n}$ gilt mit $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ und $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$:

$$F_n(U) = \begin{pmatrix} \rho v_n \\ m_x v_n + p n_x \\ m_y v_n + p n_y \\ (E + p) v_n \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_n = \frac{1}{2}(F_n(U_L) + F_n(U_R)) - \frac{1}{2}\alpha(U_R - U_L),$$

$$\alpha = \max(|v_{n,L}| + c_L, |v_{n,R}| + c_R), \quad \frac{d\bar{U}_K}{dt} = -\frac{1}{A_K} \sum_{e \in \partial K} \ell_e \hat{F}_{n_{K,e}}.$$

Der Rusanov-Fluss verwendet noch konstante Zellzustände (P0). Ein gemeinsamer Kantenfluss geht mit entgegengesetzten Vorzeichen in beide Zellen ein: innere Beiträge heben sich in der Gesamtbilanz auf. Die skalare lineare Rekonstruktion und Eckstern-Begrenzung sind noch nicht auf Euler übertragen. Insbesondere muss später die Kopplung von Impuls, Energie und positivem Druck berücksichtigt werden.

3 Zeit und Rand

SSP-RK2 verwendet $U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n, t_n)$ und $U^{n+1} = \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}[U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)}, t_n + \Delta t)]$. Die globale Schrittweite beginnt mit

$$\Delta t = 0.4 \min_K \frac{A_K}{\sum_e \ell_e \alpha_e}.$$

Ausgabezeiten begrenzen sie zusätzlich. Beide Stufen müssen positive Dichte und positiven Druck haben; auch das CFL-Limit der Zwischenstufe wird geprüft. Andernfalls wird der Versuch halbiert, bei zu vielen Fehlversuchen abgebrochen. Es gibt keine nachträglichen Floors. Die Zeitformel zweiter Ordnung macht den räumlichen P0-Ansatz nicht zu einem insgesamt zweitordentlichen Verfahren. Ein allgemeiner Positivitätsbeweis wird hier nicht beansprucht.

4 Reproduzierbare Versuchsreihe

34 unabhängige Rechnungen liefen mit sechs Prozessen auf dreihemden (sechs physische Kerne, zwölf Hardwarethreads), mit einem BLAS-Thread je Prozess. Python 3.12.3, NumPy 1.26.4; Laufzeit der Serie 40.34 Sekunden. Quellen und SHA-256, Parameter, Versionen und Diagnostik liegen in `series/results.json` und `series/source`. Laufzeiten sind einzelne Beobachtungen, keine statistische Performanceuntersuchung.

- 28 Sod-Rechnungen: Basistiefen 8, 10, 12, Winkel 0, 30, 90, 135 Grad, je uniform und lokal verfeinert; zusätzlich Tiefe 14 bei 0 und 30 Grad. Links $(\rho, u, p) = (1, 0, 1)$, rechts $(0.125, 0, 0.1)$, Endzeit 0.15. Die Trennlinie geht durch $(0.6, 0.6)$. Analytische Aussenrandzustände am Kantenmittelpunkt setzen die ebene Riemann-Lösung fort; dies ist kein geschlossenes Stossrohr. Referenz sind konservative Zellintegrale nach geometrischer Aufteilung an den Wellenfronten, nicht Mittelpunktwerte.
- Vier Druckpulse: Tiefen 10 und 12, beide Gittertypen. Ruhendes Gas mit $\rho = 1$, $p = 10$ im Quadrat mit Zentrum $(0.6, 0.6)$ und Halbbreite 0.15, ausserhalb $p = 1$; Endzeit 0.06. Gleitwände spiegeln Normalimpuls. Gesamtmasse 2 und Energie 7.025 bleiben erhalten; Wanddruckkräfte sind in der Impulsbilanz enthalten. Keine exakte dynamische Referenz.
- Zwei Expansions-Stresstests: Tiefe 10, beide Gittertypen, $\rho = 1$, $p = 0.4$, $v_x = \mp 2$ beidseits $x = 0.6$, Endzeit 0.05. Nullgradient-Rand, nicht allgemein reflexionsfrei. Kein Vakuumtest.

Lokale Verfeinerung bedeutet zwei vorgegebene Verfeinerungspässe innerhalb Radius 0.22 um $(0.6, 0.6)$ samt Konformitätsabschluss. Initialwerte werden konservativ über Zellen gemittelt. Alle Fälle verwenden 31 Ausgabezeiten; die beiden uniformen Tiefe-12-Filme enthalten alle 31 Zustände, andere NPZ-Dateien nur Anfang und Ende.

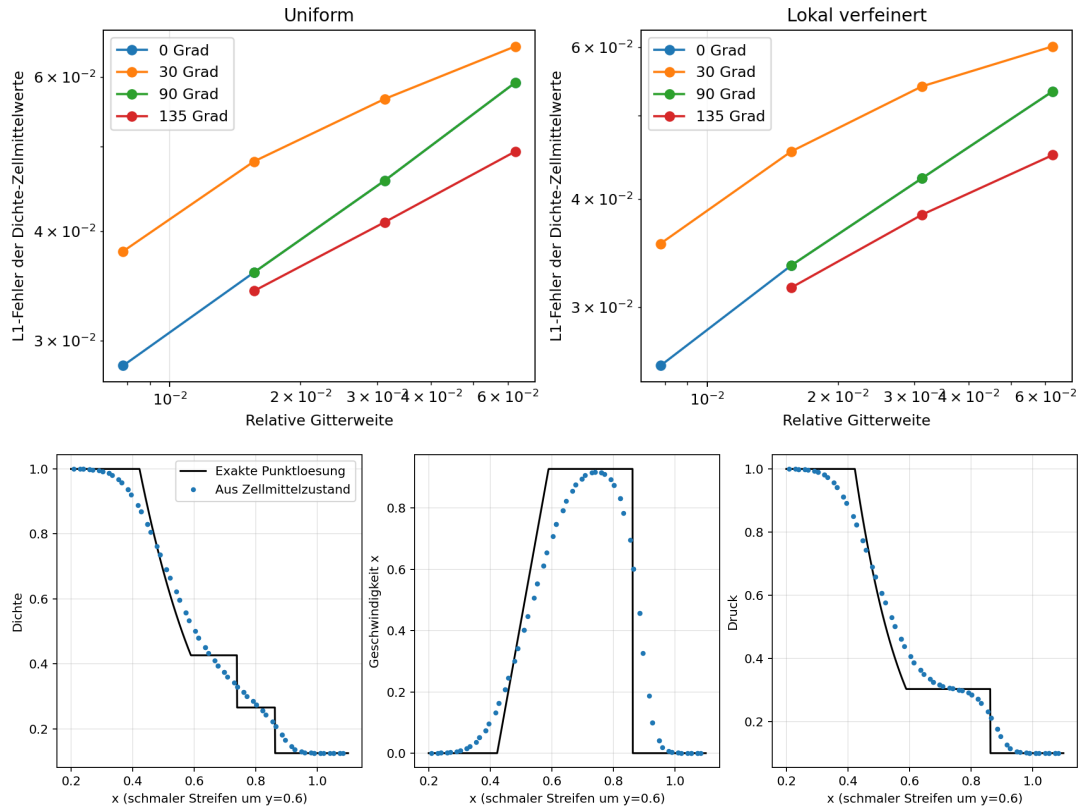
5 Prüfungen und Befunde

64 lokale Tests bestanden, darunter zehn Euler-Tests, die auch auf dreihemden bestanden. Sie prüfen unter anderem Zustandsumrechnung, Fluss-Antisymmetrie, Rotation, konstante Zustände, Wandbilanz, Randzeiten, Schrittverwerfung und Sod-Referenzkonsistenz. Ein identischer kleiner Lauf auf beiden Rechnern unterscheidet sich maximal um $2.22 \cdot 10^{-15}$ in gespeicherten Zuständen.

Grösse	Befund
Maximale Blattzahl	20254
Kleinste Dichte angenommener Stufen	0.125
Kleinsten Druck angenommener Stufen	0.0820109
Maximale Massenbilanzabweichung	$2.08 \cdot 10^{-14}$
Maximale Energiebilanzabweichung	$3.92 \cdot 10^{-14}$
Schrittverwerfungen wegen Stufen-CFL	8279
Schrittverwerfungen wegen unzulässigem Zustand	0

Bilanzfehler bedeuten $\sum_K A_K U_K(t) - \sum_K A_K U_K(0)$ plus zeitintegriertem Aussenfluss, mit RK-Gewichten. Sie wurden an jedem angenommenen Schritt gemessen. Positive beobachtete Stufen sind kein Beweis für beliebige Anfangsdaten. Die strenge zweite CFL-Prüfung verursacht erhebliche zusätzliche Arbeit und ist später optimierbar.

6 Genauigkeit und sichtbare Dynamik



Der Dichtefehler ist $\sum_K A_K |\bar{\rho}_K - \bar{\rho}_K^{\text{exakt}}|$. Er sinkt auf allen acht Folgen. Bei uniformem Gitter und Winkel 0 Grad sinkt er von 0.05916 auf 0.02808 (Tiefe 8 nach 14), bei 30 Grad von 0.06507 auf 0.03794. Unterschiedliche Orientierungen bleiben sichtbar. Zwei Tiefenstufen halbieren die Längenskala; beobachtete logarithmische Raten liegen zwischen 0.15 und 0.39. Dies ist keine glatte Konvergenzstudie und kein Nachweis einer höheren Ordnung.

Die Profilkurven vergleichen exakte Punktwerte mit Zuständen aus Zellmitteln in einem schmalen Streifen. Druck aus dem gemittelten konservativen Zustand ist nicht der gemittelte Punktdruck. Insbesondere Kontakte sind stark verschmiert. Die Filme `sod.mp4` und `pulse.mp4` zeigen gespeicherte Felder mit zeitlich festen Farbskalen, ohne zeitliche Zwischenbildinterpolation.

7 Archiv und nächster Schritt

`Hydro_Euler_01` bleibt die erste, unveränderte Serie. `Hydro_Euler_02` wiederholt sie mit getrennten Ablehnungszählern; gespeicherte Zustände, Zeiten und vorhandene Referenzfelder aller 34 Fälle stimmen bitweise mit Serie 01 überein. `EULER.md` beschreibt API und Startbefehle. Zur erneuten Auswertung dieses Archivs: `PYTHONPATH=series/source python analyze_euler.py`. NumPy, Matplotlib und ffmpeg werden benötigt.

Als nächster Schritt empfiehlt sich eine getrennt getestete lineare Euler-Rekonstruktion mit Positivitätskontrolle: zuerst glatte Felder, dann dieselben Stossprobleme und Druckpulse. Der P0-Solver bleibt die konservative Vergleichsbasis. Ein Wechsel des Riemannflusses sollte nicht gleichzeitig erfolgen, damit Ursachen von Verbesserungen erkennbar bleiben.

Quellen: Clawpack Riemann Book: Euler-Gleichungen und exakte Riemann-Lösung; MFEM 4.8: Rusanov-Fluss. Keine direkte Übernahme oder Seitenzuordnung aus dem bereitgestellten Lehrbuch wird behauptet.