

Dynamische konforme CFK-Gitter

Konservative Verfeinerung und Vergröberung für zweidimensionale Euler-Rechnungen

1 Was sich gegenüber den bisherigen Rechnungen ändert

Der Baum kann sich jetzt **während der Rechnung** verändern. Bisher waren auch lokal verfeinerte Gitter zeitlich fest. Die Blätter bleiben Dreiecke des binären Integer-Baums mit Wurzel 1, Kindern $2k, 2k+1$ und Fläche $A_k = 2 \cdot 2^{-d(k)}$. Es gibt keine geometrische Nachbarsuche im Solver. HLLC, die begrenzte lineare Euler-Rekonstruktion mit Ecksternen, SSP-RK2 und die globale CFL-Kontrolle bleiben unverändert. P0/P1 in den Namen der adaptiven Varianten bezeichnet **nur die Zustandsübertragung**, nicht die Ordnung des Euler-Solvers. Selbstgravitation ist noch nicht enthalten.

2 Konservative Übertragung

Gespeichert werden die Mittelwerte $U = (\rho, \rho v_x, \rho v_y, E)$. Für Elternzelle P und ihre gleich grossen Kinder gilt

$$A_P U_P = A_0 U_0 + A_1 U_1, \quad U_P = \frac{1}{2}(U_0 + U_1).$$

Konstante Verfeinerung setzt $U_0 = U_1 = U_P$. Lineare Verfeinerung setzt $U_c = U_P + G_P(x_c - x_P)$, wobei G_P die vorhandene begrenzte Rekonstruktion ist. Da der Schwerpunkt das Flächenmittel der Koordinaten ist, integriert dies das affine Feld exakt. Positive Dichte und positiver Druck an den Dreiecksecken sichern auch die Zulässigkeit der Kindmittel. Druck und Geschwindigkeit werden nicht separat gemittelt; es gibt keine globale Bilanzreparatur. Auch zusätzliche Konformitätskinder erhalten diese Behandlung.

Vergrößert werden nur Blattgeschwister. Liegt die Hypotenuse im Inneren, muss der Hypotenusenpartner ebenfalls zwei Blattkinder besitzen und gemeinsam zusammengelegt werden. Sonst bleibt das Paar unverändert. Ganze Eingaben werden vor einer Mutation validiert. Der Baum bleibt nach jedem Umbau konform.

3 Wann wird angepasst?

$$\eta_K = \max_{L \text{ an Kante von } K} \max \left(\frac{|\rho_K - \rho_L|}{\max(\rho_K, \rho_L)}, \frac{|p_K - p_L|}{\max(p_K, p_L)} \right).$$

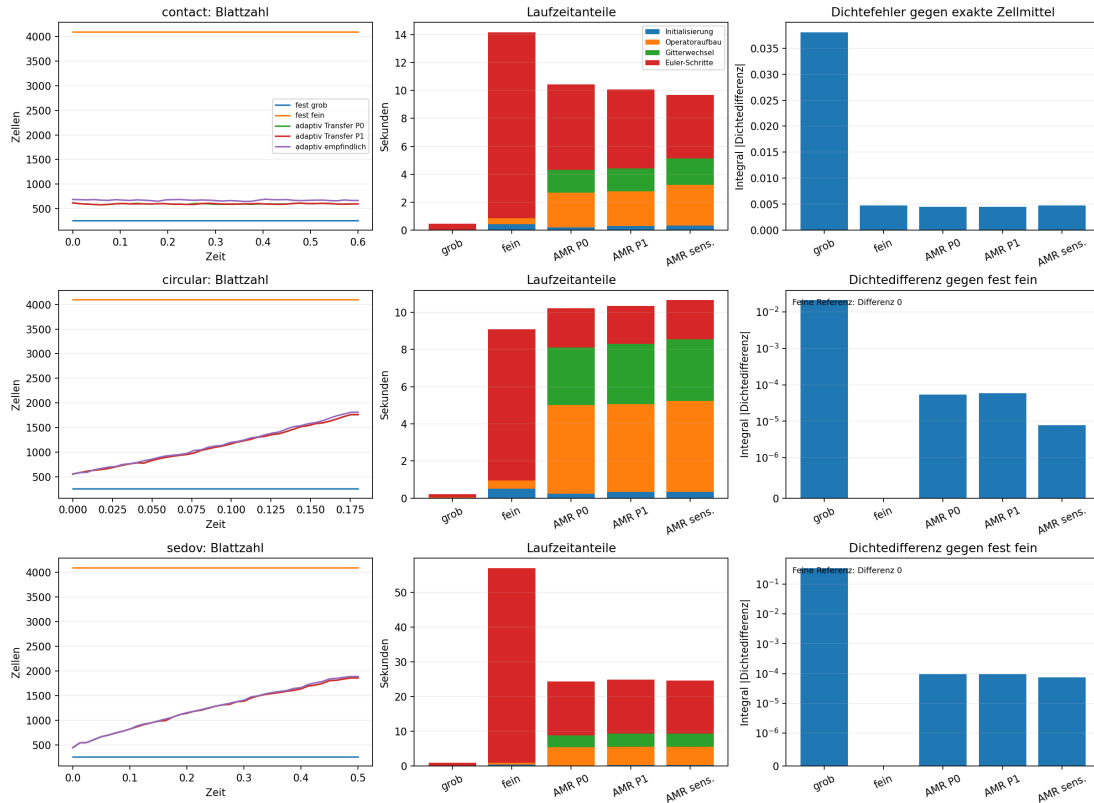
Verfeinerung bei $\eta > 0.10$, Vergröberung bei $\eta < 0.02$, jeweils mit zwei Nachbarringen Schutzpuffer um die Verfeinerungsmarkierung. Die empfindliche Variante verwendet 0.05/0.01. Dies ist ein Merkmalsdetektor, kein bewiesener Fehlerschätzer. Mindesttiefe, Maximaltiefe und Zellbudget begrenzen den Umbau. Bei Budgetüberschreitung wird der ganze Verfeinerungsblock verworfen; eine Prioritätsvergabe ist noch nicht implementiert.

Je Versuch gibt es 40 gleich grosse physikalische Anpassungsintervalle. Umbauten erfolgen nur **zwischen vollständigen RK-Schritten**. Innerhalb der Intervalle bestimmt die CFL-Bedingung die Zeitschritte. Die kleinsten Zellen können weiterhin den globalen Schritt begrenzen. Gemeinsame Kantenflüsse auf konformen Gittern und globale Zeitschritte benötigen hier kein grob-fein-Refluxing.

4 Versuchsplan und Hauptserie

Entropieprofil: $\rho = 1 + 2 \exp(-|x - c(t)|^2 / (2 \cdot 0.07^2))$, $p = 1$, $v = (0.5, 0.15)$, $c(0) = (0.4, 0.5)$, Ende $t = 0.6$. Die exakte Lösung ist Translation. Anfangsmittel werden mit Gauss-Duffy-Quadratur (acht Punkte je Richtung) bestimmt. Kreisförmiger Drucksprung und endliche Sedov-Energieeintragsregion entsprechen dem vorherigen Radialbericht; Endzeiten 0.18 und 0.5. Alle Probleme verwenden $\gamma = 1.4$.

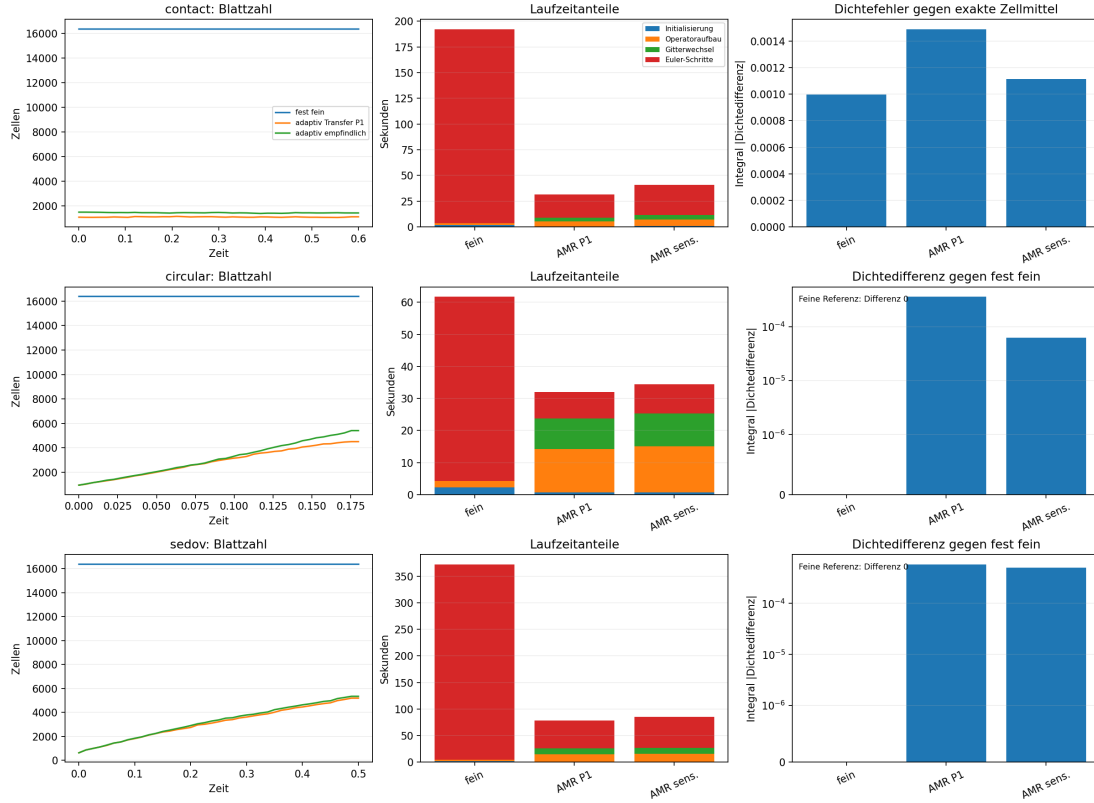
Die Hauptserie vergleicht Tiefe 8 (256 Zellen), Tiefe 12 (4096 Zellen), adaptiven konstanten/linearen Transfer und empfindliche Markierung. Startgitter werden aus den analytischen Anfangsdaten markiert und danach neu mit deren Zellmitteln initialisiert. Es wird kein grober Anfangszustand als Ersatz für die feinen Anfangsdaten benutzt.



Beim Entropieprofil genügen etwa 600 aktive Zellen für eine ähnliche Genauigkeit wie 4096 feste Zellen. Der kreisförmige Drucksprung spart hier noch keine Gesamtzeit: der Gitter- und Operatoraufbau dominiert den Umbau. Sedov benötigt adaptiv rund 25 statt 57 Sekunden. Die vollständigen Zahlentabellen stehen nach der feineren Kontrollserie.

5 Feinere Kontrollserie

Neun weitere Versuche vergleichen Tiefe 14 (16384 Zellen) mit adaptivem linearem Transfer und empfindlicher Markierung. Die minimale Tiefe bleibt 8. Die physikalischen Endzeiten und Anpassungsintervalle sind unverändert. Damit prüfen wir, ob der Befund von der ersten Auflösung abhängt.



Sedov mit linearem Transfer benötigt maximal 5192 statt 16384 Zellen und 78.6 statt 373.0 Sekunden. Die radiale Dichteabweichung von der Punktreferenz beträgt 0.15844 gegenüber 0.15852 beim festen feinen Gitter. Beim glatten Profil ist die normale Markierung dagegen zu wenig empfindlich: der Fehler auf dem gemeinsamen feinen Gitter ist $2.58 \cdot 10^{-3}$, empfindlich $1.45 \cdot 10^{-3}$ und fest fein $9.98 \cdot 10^{-4}$. Die Genauigkeit darf deshalb nicht allein aus der Zellzahl abgeleitet werden.

6 Zahlentabellen und Prüfung

Hauptserie: maximale Tiefe 12.

Problem	Variante	Blätter min–max	Zeit [s]	Dichtedifferenz
contact	fest grob	256–256	0.49	0.047
contact	fest fein	4096–4096	14.39	0
contact	AMR Transfer P0	580–618	10.46	0.00146
contact	AMR Transfer P1	580–618	10.11	0.000978
contact	AMR empfindlich	648–694	9.73	0.000319
circular	fest grob	256–256	0.24	0.0211
circular	fest fein	4096–4096	9.30	0
circular	AMR Transfer P0	554–1762	10.27	5.36e-05
circular	AMR Transfer P1	554–1762	10.41	5.88e-05
circular	AMR empfindlich	558–1810	10.71	7.87e-06
sedov	fest grob	256–256	1.03	0.345
sedov	fest fein	4096–4096	57.14	0
sedov	AMR Transfer P0	440–1856	24.48	9.47e-05
sedov	AMR Transfer P1	440–1856	24.92	9.43e-05
sedov	AMR empfindlich	440–1886	24.70	7.5e-05

Gesamtdauer der Serie: 67.9 Sekunden mit sechs Prozessen. Die Dichtedifferenz ist $\int |\rho - \rho_{\text{fest, fein}}| dA$ auf dem gemeinsamen feinen Gitter, mit stückweise konstanten Zellmitteln. Der Wert null bei fest fein ist eine Definition, kein Genauigkeitsnachweis.

Zusatzserie: maximale Tiefe 14.

Problem	Variante	Blätter min–max	Zeit [s]	Dichtedifferenz
contact	fest fein	16384–16384	193.32	0
contact	AMR Transfer P1	1040–1130	31.73	0.00238
contact	AMR empfindlich	1366–1472	40.97	0.000782
circular	fest fein	16384–16384	62.62	0
circular	AMR Transfer P1	956–4512	32.23	0.000358
circular	AMR empfindlich	956–5414	34.64	6.28e-05
sedov	fest fein	16384–16384	372.99	0
sedov	AMR Transfer P1	632–5192	78.62	0.00058
sedov	AMR empfindlich	632–5346	85.92	0.000506

Gesamtdauer der Serie: 405.4 Sekunden mit sechs Prozessen. Die Dichtedifferenz ist $\int |\rho - \rho_{\text{fest, fein}}| dA$ auf dem gemeinsamen feinen Gitter, mit stückweise konstanten Zellmitteln. Der Wert null bei fest fein ist eine Definition, kein Genauigkeitsnachweis.

Alle 24 Produktionsläufe erfolgreich. Maximale Bilanzabweichung einschliesslich Randflüssen: 3.21e-13. Kleinste Dichte: 0.0418264; kleinster Druck: 9.99617e-06. Zustandsbedingte Schrittverwerfungen: 0; CFL-Halbierungen: 9805. Verfeinerungsverwerfungen am Zellbudget: 0. Die 77 lokalen Tests umfassen Geometrie, Baum, Rekonstruktion, Flüsse, Radialreferenz sowie zwölf neue Adaptivitäts-/Auswertungstests. Zehn neue Solver-/Baumtests bestehen auch auf dreihemden. Alle gespeicherten Zustände und Blattmengen werden in der Auswertung nochmals auf Form, Endlichkeit, Positivität und Konformität geprüft.

7 Interpretation und Grenzen

Die Adaptivität kann die feine numerische Lösung mit wesentlich weniger Zellen annähern. Das heisst nicht, dass der Schock selbst schon exakt aufgelöst ist. Beim Sedov-Test bleibt die endliche Energieeintragsregion eine Modellabweichung von der kalten Punktquellenreferenz.

Der exakte Transporttest speichert zwei verschiedene Fehler: gegen die exakten Mittel auf dem jeweiligen Gitter und auf einem gemeinsamen feinen Gitter nach konstanter Prolongation. Nur letzterer vergleicht dieselbe räumliche Darstellung. Die radialen Tabellen messen die Abweichung von einer *numerischen* Referenz, keinen exakten Diskretisierungsfehler. Kleine Vorteile einer adaptiven Variante können auch aus anderen Zeitschritten und Fehlerkompensation entstehen.

Bei kleinen Rechnungen kann der wiederholte Neuaufbau von Nachbarn, Ecksternen und Least-Squares-Operatoren den Vorteil weniger Zellen aufzehren. Beim Entropieprofil gibt es zusätzliche CFL-bedingte Schrittwiederholungen; die gemessene Laufzeit ist deshalb nicht einfach proportional zur Blattzahl. Ein Lauf pro Variante mit sechs gleichzeitig laufenden Prozessen liefert eine Orientierung, **keinen belastbaren Thread-Speedup oder isolierten Performance-Benchmark**. Ein- und Ausgabe sind nicht Teil der gestapelten Rechenphasen, aber in der tabellierten Jobzeit bis zur Datenspeicherung enthalten.

8 Vorbereitung einer C++-Portierung

Die neuen Schnittstellen trennen Topologieplanung, Zustandsübertragung, Gitter-Snapshot und Zeitintegration. Integercodes bleiben stabile geometrische Kennungen; kompakte Indizes und Views gelten nur für einen Snapshot. Vorhandene C++-Code-/Baumtypen sollen wiederverwendet werden. Transfer und Rekonstruktion besitzen unabhängige Zielzellen; Kantenflüsse benötigen hingegen eine konfliktfreie, deterministische Zellakkumulation.

Ein C++-Hydroport wurde hier noch nicht begonnen. Vorher sollten wir die Anpassungsfrequenz und CFL-Wiederholungen untersuchen und messen, welcher Anteil durch inkrementelle Caches vermeidbar ist. Die Python-Version bleibt die Referenz für Codes, Transferpläne, Bilanzen und numerische Toleranzen.

9 Reproduktion und Archiv

`results.json` und `deep/results.json` enthalten Parameter, Diagnostik, Quellprüfsummen, Python-/NumPy-Version und Rechnernamen. Die jeweiligen `source/`-Verzeichnisse bewahren den Produktionsstand. NPZ-Dateien enthalten float64-Zustände und dezimale Blattcodes für jeden Ausgabezeitpunkt, ohne Pickle. Die Analyse speichert SHA-256 der Datendateien. Ihre separat archivierte Skripte liegen unter `analysis/`.

Der Gebrauch und die mathematischen Details sind unabhängig vom Chat in `ADAPTIVITY.md` dokumentiert. Aufrufe aus dem Projektverzeichnis CFK/2D: `experiment_adaptive_euler.py --output NEU`, für die Zusatzserie mit `--deep`, sowie `analyze_adaptive_euler.py ORDNER --movies`. Je Prozess wird BLAS auf einen Thread beschränkt.

Die drei Filme der Hauptserie dauern je 12.3 Sekunden. Links steht das feste feine Gitter, rechts der dynamische Baum mit sichtbaren Kanten; darunter Profile und Blattzahlen. Jeder gespeicherte Zustand wird dreimal gezeigt, ohne erfundene interpolierte Zwischenzustände. Dieser Bericht ist ein Baustein, noch nicht die angekündigte Gesamtarbeit.