

Vom rekonstruierten Feld zur Bewegung

Skalarer Finite-Volumen-Transport auf dem konformen CFK-Baum

1. Was dieser Schritt leistet

Bislang haben wir aus Zellmittelwerten ein räumliches Profil rekonstruiert. Jetzt bewegen wir dieses Profil. Das Modell

$$\partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) = 0, \quad \mathbf{v} = (0.45, 0.15)$$

verschiebt die Anfangsfunktion ohne Formänderung. Jede numerische Verbreiterung ist deshalb messbarer Diskretisierungsfehler. Dies ist noch *keine Gasdynamik*: weder Druck noch Schallwellen oder Stöße werden hier berechnet. Alle Größen sind dimensionslos.

Der CFK-Baum bleibt erhalten: Wurzel 1, Kinder $2k$ und $2k + 1$; die aktiven Blätter sind die Kontrollvolumina. Wurzelecken sind $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Kantennachbarn werden weiterhin durch Integernavigation bestimmt. Ecknachbarn gehen in den Begrenzer ein, nicht als zusätzlicher Fluss: Ein gemeinsamer Punkt hat Kantenlänge null. Der Baum bleibt während eines Laufs unverändert, auch beim lokal verfeinerten Gitter.

2. Ein Fluss pro Kante

Für Blatt K mit Fläche A_K und Schwerpunkt c_K gilt

$$u_K(x) = U_K + g_K \cdot (x - c_K), \quad \frac{dU_K}{dt} = -\frac{1}{A_K} \sum_{e \in \partial K} F_{K,e}.$$

Die Gradienten stammen aus unserem Least-Squares-Fit und werden durch Eckstern-Minima und -Maxima skaliert. Der Mittelwert bleibt dabei erhalten. Sei m_e der Kantenmittelpunkt, $s_{K,e} = |e| \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{K,e}$. Der Upwind-Fluss ist

$$F_{K,e} = s_{K,e} \begin{cases} u_K(m_e), & s_{K,e} \geq 0, \\ u_J(m_e), & s_{K,e} < 0 \quad (\text{innerer Nachbar } J). \end{cases}$$

Ein innerer Fluss wird nur einmal ausgerechnet, dann in beiden Zellen mit entgegengesetztem Vorzeichen verbucht. Das sichert diskrete Erhaltung. Am einströmenden Rand wird ein vorgeschriebener Wert verwendet; am ausströmenden Rand die innere Rekonstruktion. Analytische Ausflusswerte oder analytische Eckwerte werden dem Verfahren *nicht* gegeben. Die Mittelpunktsregel integriert die lineare innere Spur exakt; allgemeine nichtlineare Randfunktionen werden nur approximativ integriert.

3. Zeitintegration und Nichtnegativität

Mit dem Flussoperator L verwenden wir SSP-RK2:

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n, t_n), \quad U^{n+1} = \frac{1}{2} U^n + \frac{1}{2} [U^{(1)} + \Delta t L(U^{(1)}, t_n + \Delta t)].$$

Randdaten werden zu den beiden Stufenzeiten ausgewertet. Für $S_K = \sum_e \max(s_{K,e}, 0)$ wählen wir konservativ

$$\Delta t \leq 0.9 \min_{K: S_K > 0} \frac{A_K}{3S_K}.$$

Der Mittelwert eines linearen Dreiecksprofils ist das Mittel seiner drei Kantenmittelpunktwerte. Unter dieser Schranke bleiben beim expliziten Euler-Schritt deren Restgewichte nichtnegativ. Nichtnegative begrenzte Rekonstruktion und nichtnegativer Einfluss liefern somit nichtnegative Mittelwerte; SSP-RK2 erhält diese Eigenschaft als konvexe Kombination. Das gilt bis auf Rundung und ohne nachträgliches Abschneiden. Es ist *kein* Nachweis eines Maximumprinzips oder positiver Euler-Drücke.

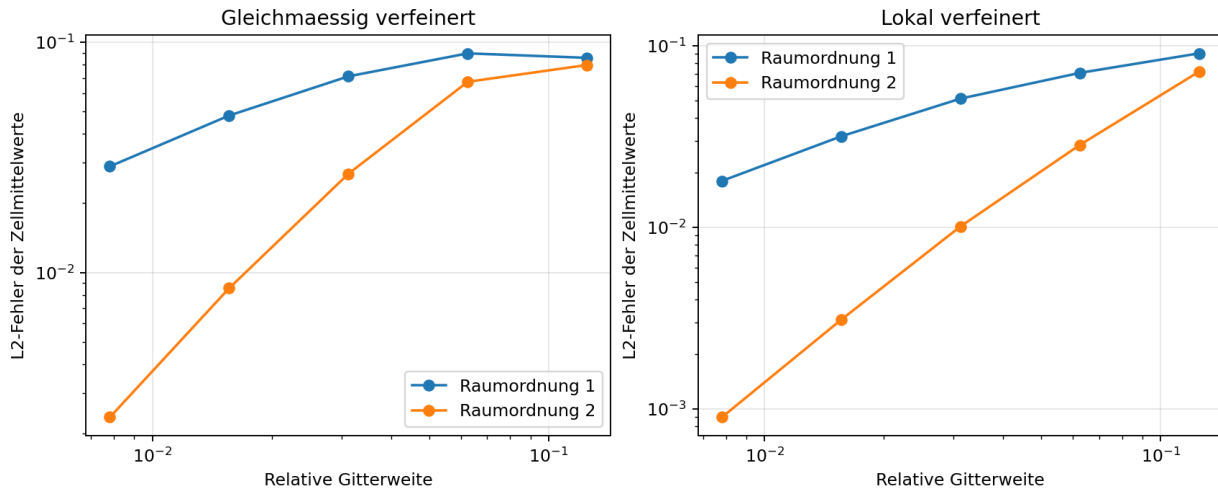
4. Reproduzierbarer Versuch

Das Anfangsprofil ist $u_0(x) = \max(1 - |x - (0.45, 0.55)|^2 / 0.25^2, 0)^4$. Die exakte Lösung $u(x, t) = u_0(x - tv)$ bleibt bis $T = 0.8$ vollständig im Gebiet. Wir vergleichen konstante und begrenzte lineare Rekonstruktion, beide mit RK2, auf den Basistiefen 6, 8, 10, 12 und 14. Die zweite Gitterfamilie verfeinert zweimal um $(0.6, 0.6)$ im Radius 0.22. Zwei Tiefenstufen halbieren die lineare Gitterweite. Insgesamt: 20 Läufe.

Referenz- und Anfangsmittelwerte werden durch Duffy-Gauss-Quadratur mit acht Punkten je Richtung bestimmt. Zwölf Punkte kontrollieren die Endreferenz: auf den feinsten Gittern unterscheiden sich die Mittelwerte im L^2 -Maß um weniger als $9 \cdot 10^{-12}$. Gemessen wird $E_2 = [\sum_K A_K (U_K - \bar{u}_K)^2]^{1/2}$, nicht der punktweise Fehler des rekonstruierten Feldes.

Gitter	Blätter	E_2 konstant	E_2 linear	Ordnung linear
Uniform, Tiefe 14	16384	0.028918	0.0023493	1.863
Lokal, Basis 14	20254	0.018000	0.0008991	1.784

Die Ordnung ist $\log_2(E_{d-2}/E_d)$, kein allgemeiner Beweis. Auf groben Gittern ist der Buckel unteraufgelöst; dort ist selbst die Fehlerabnahme nicht durchgehend monoton. Der lineare Ansatz gewinnt auf den feinsten Gittern einen Faktor 12.3 bzw. 20.0 gegenüber dem konstanten.



Die Bilanz $M(T) - M(0) + \int_0^T F_{\partial\Omega} dt$ schließt in allen Läufen auf $2.03 \cdot 10^{-17}$. Die Randintegration verwendet dieselben RK-Gewichte wie der Zustand. Numerische Diffusion kann trotz kompakter exakter Lösung einen kleinen Ausfluss erzeugen. Das Minimum aller gespeicherten Zustände ist null; es wurde nichts abgeschnitten.

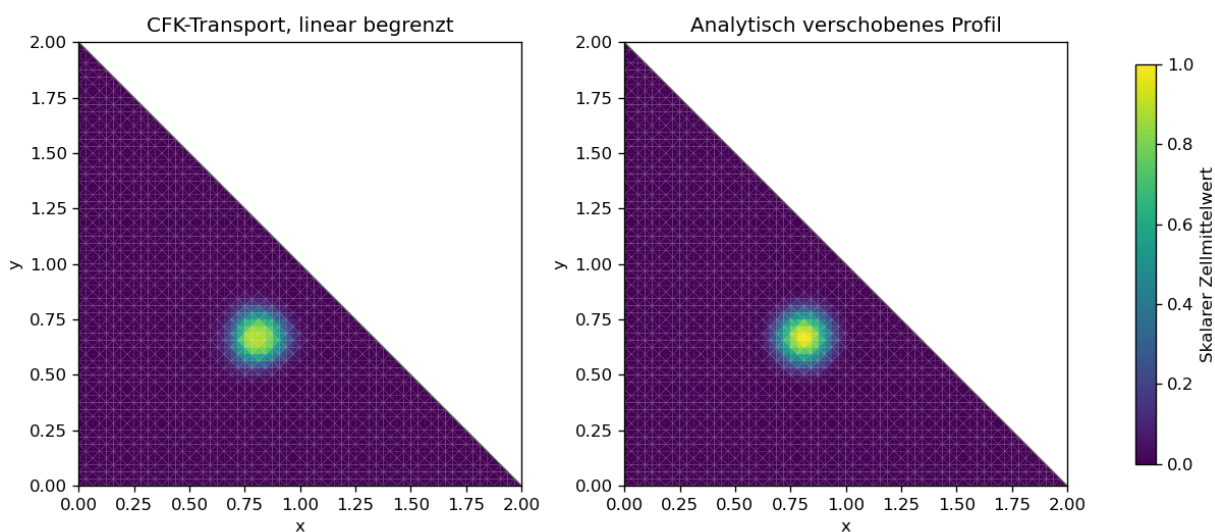
5. Prüfung, Daten und nächster Schritt

46 Tests bestehen, davon neun neue Transporttests. Diese prüfen u.a. freie konstante Zustände für verschiedene Geschwindigkeitsrichtungen, Randbilanz, Stufenzeiten, Nichtnegativität, ruhenden Transport und den Abgleich vorbereiteter Least-Squares-/Begrenzeroperatoren mit dem Referenzcode. Die neun Tests wurden zusätzlich aus den archivierten Quellen ausgeführt.

`results.json` enthält Parameter, Versionen und Quellprüfsummen; `source/` die Quellen, NPZ-Dateien Codes und Zellmittelwerte. `transport.mp4` zeigt 65 echte Ausgabezustände bei 4096 Blättern neben der analytischen Referenz. Diese Ausgabezeiten verkürzen einzelne Schritte auf uniformer Tiefe 12; alle anderen Konvergenzläufe speichern nur Anfang und Ende. Raum- und Zeitfehler sind hier noch nicht getrennt.

Empfehlung: zuerst bewegte Sprünge in mehreren Richtungen sowie Zeitverfeinerung auf festem Baum prüfen, dann die Euler-Gleichungen. Least-Squares-Anschluss: Bauer (2004), Abschnitt 3.1.2; die hier angegebenen Upwind- und RK2-Formeln sind Standardverfahren, keine behauptete wörtliche Implementierung eines bestimmten Algorithmus aus Godlewski/Raviart.

CFK-Baum: 4096 Blätter | $t = 0.800$



Endzustand des Films: links die numerischen Zellmittelwerte, rechts die analytische Referenz auf denselben 4096 Dreiecken. Die gemeinsame Farbskala macht die leichte Verbreiterung und Abflachung sichtbar.