

Günstige und ungünstige Zentren in adaptiven CFK-Gittern

G2: Gepaarte Verschiebungen schmaler Gaußverteilungen

Forschungsprotokoll des Projekts CFK

17. September 2026

1 Hypothese und primäre Zielgröße

Die vorab formulierte Vermutung lautet: Bei gleicher Teilchenzahl, Breite und relativer Punktanordnung hängt die Größe des minimalen konformen Baumes systematisch von der Lage des Zentrums zur Bisektionshierarchie ab. Das Verhältnis der größten zur kleinsten erwarteten Blattzahl soll höchstens zwei betragen. Für die endliche untersuchte Zentrenmenge C :

$$R(n) = \frac{\max_{c \in C} \mathbb{E}[L(c, n)]}{\min_{c \in C} \mathbb{E}[L(c, n)]} \leq 2.$$

Dies ist eine Hypothese über Erwartungswerte, nicht über jede einzelne Punktwolke. Sie behauptet weder eine maximale Tiefendifferenz von eins noch eine universelle Grenze für sämtliche möglichen Zentren. Bei adaptiven Bäumen ist eine Verdopplung der Blattzahl nicht allgemein gleichbedeutend mit einer zusätzlichen Tiefenebene.

Primär wird L untersucht. Die Knotenzahl folgt aus $N = 2L - 1$. Zusätzlich werden notwendige Trennungen S , zusätzliche Konformitätsteilungen $E = L - 1 - S$, E/S , alle/besetzte/leere Tiefenhistogramme und Laufzeiten protokolliert. Die Mathematik der Integercodierung und des minimalen Abschlusses bleibt unverändert gegenüber den Berichten G1 und vom 16. September.

2 Vorab festgelegtes Versuchsdesign

Es werden $n = 10, 100, 1000, 10^4, 10^5$ mit jeweils zehn unabhängigen Punktwolken untersucht. Jede Wolke wird an dieselben 34 Zentren verschoben. Insgesamt entstehen $5 \cdot 10 \cdot 34 = 1700$ Bäume. Die Breite ist fest $\sigma = 0,025$, die Kovarianz $\sigma^2 I_2$. Das Gitter bedeckt weiterhin das Wurzeldreieck $\text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (0, 2)\}$; die Punkte liegen in $[0, 1]^2$.

Die Zentren bestehen aus 25 geschichtet zufälligen Positionen (eine in jeder Zelle einer 5×5 -Zerlegung von $[0, 2; 0, 8]^2$), der Referenz $(0, 5, 0, 5)$ und acht geometrischen Kontrollen. Für die Dreieckscodes 73 und 293 auf Tiefe 6 bzw. 8 werden jeweils Hypotenusenmittelpunkt, zwei normal versetzte Punkte und Schwerpunkt verwendet. Die Normalversetzung hat maximale Koordinatenverschiebung $1/80$, nicht notwendigerweise diese euklidische Länge. Alle exakten rationalen Koordinaten stehen in den Metadaten. Die räumliche Auswahl erfolgte vor Sichtung der Produktionsdaten.

Für jedes Paar (n, r) werden unabhängige Normaloffsets erzeugt und als exakte rationale Darstellungen der gezogenen Gleitkommazahlen gespeichert. Die Addition des Zentrums erfolgt rational. Damit bleibt die relative Punktanordnung beim Verschieben exakt gleich. Der Seed ist die Big-Endian-Interpretation von SHA-256 der Zeichenfolge

`cfk-centers-g2:20260917:n:repetition`

Die Mittelpunktauswahl verwendet den festen Seed 2026091702. Die Zentrenreihenfolge wird pro Wolke reproduzierbar zufällig permutiert.

Anders als bei G1 wird nicht auf das Quadrat konditioniert: Kein Punkt wird abgeschnitten, verworfen oder neu gezogen. Ein Grenzübertritt führt zum Abbruch und einer Designprüfung. Alle Zentren liegen mindestens acht Standardabweichungen vom Rand. Diese Regel erhält die Paarung auch formal; die realisierten Punktmengen werden vollständig auf Gebietszugehörigkeit geprüft.

3 Implementierung und Qualitätssicherung

Verwendet wird der getestete verteilte globale Konformitätsabschluss. Bis 2048 Teilchen wird seriell, darüber mit höchstens vier vorbereiteten Prozessen gerechnet. Je Wolke läuft ein frischer Hauptprozess; der Pool wird für ihre Zentren wiederverwendet. Die Aufbauzeit schließt Verschiebung, Prüfsummen, Poolstart und Kennzahlenberechnung aus. Sie ist keine direkte Fortsetzung des früheren Laufzeitvergleichs mit anders vorbereiteten Eingaben.

Vor Produktionsbeginn bestanden 53 Tests, darunter exakte Paarung, Referenzvergleich an sämtlichen Zentren und Abbruch bei Grenzübertritt. Ein separater Probelauf mit 34 Bäumen bei $n = 10^4$ gehört nicht zur Produktionsserie. Alle Produktionsbäume erhalten leichte Invariantenprüfungen, die erste Wiederholung bei $n \leq 100$ zusätzlich vollständige Konformitäts- und Eindeutigkeitsprüfungen (68 Kontrollbäume). Große Bäume werden nicht unabhängig vollvalidiert.

Jeder fertige Baum erhält ein Einzelprotokoll, einschließlich exakter Punkt- und Wolkenprüfsummen. Gespeichert werden außerdem Quellstand, Python-/Systemversion, Zeit- und Speicherprotokolle sowie Beispielblätter aller Zentren bei $n = 1000, r = 1$. Der Speicherwächter begrenzt die Prozessfamilie auf 6 GiB RSS bei mindestens 2 GiB verbleibendem Systemspeicher; zusätzlich gilt ein Adressraumlimit von 6 GiB pro Prozess. Ein Wolkenblock hat ein Zeitlimit von 1800 Sekunden.

4 Statistische Auswertung

Die zehn Wolken sind die unabhängigen Wiederholungseinheiten, nicht die 340 Bäume einer Größenstufe. Der Schätzer ist $\hat{R} = \max_c \bar{L}_c / \min_c \bar{L}_c$. Ein Blockbootstrap zieht 10000-mal jeweils zehn vollständige Wolken mit Zurücklegen. Innerhalb jeder Ziehung bleiben alle Zentren gepaart. Die 2,5- und 97,5-Prozent-Quantile dienen als explorativer Unsicherheitsbereich. Bei nur zehn Wolken und ausgewählten Extrema ist dies keine garantierte simultane Konfidenzaussage und kein Beweis der Faktor-zwei-Grenze.

Ein explorativer Permutationstest verwendet als Statistik die Varianz der Zentrenmittel und permutiert die Zentrenlabels innerhalb jeder Wolke (10000 Wiederholungen, Plus-eins-Korrektur). Die fünf Größenstufen werden mit Holm korrigiert. Dieser Test setzt unter seiner Nullhypothese Austauschbarkeit der Zentrenlabels voraus, nicht lediglich gleiche Erwartungswerte. Die geometrisch erzeugten Messungen garantieren diese Annahme nicht. Die resultierenden p -Werte werden deshalb nur als explorative Diagnose, nicht als abschließender Nachweis eines Lageeffekts behandelt. Analyse-Seed: 2026091703.

Geometrisch betrachten wir den kürzesten Abstand des Zentrums zu einer endlichen Dreiecksseite der gleichförmigen Gitter auf Tiefe 4, 6, 8 und 10, normiert durch deren Kathetenlänge $2^{1-d/2}$. Spearman-Korrelationen mit $\bar{L}_c$ sind beschreibend. Diese wenigen Abstandsmerkmale erfassen nicht die gesamte Hierarchie; eine schwache Korrelation widerlegt daher nicht jede mögliche geometrische Erklärung.

5 Ergebnisse

n	$L_{\min}$	$L_{\max}$	$\hat{R}$	Bootstrabereich	p_{Holm}
10	87,6	120,2	1,372	1,316–1,640	0,0020
100	459,6	546,8	1,190	1,155–1,317	0,0172
1000	3535,2	3656,0	1,034	1,037–1,083	1,0000
10000	33180,7	33728,6	1,017	1,016–1,029	0,6410
100000	329657,8	331059,0	1,004	1,004–1,009	1,0000

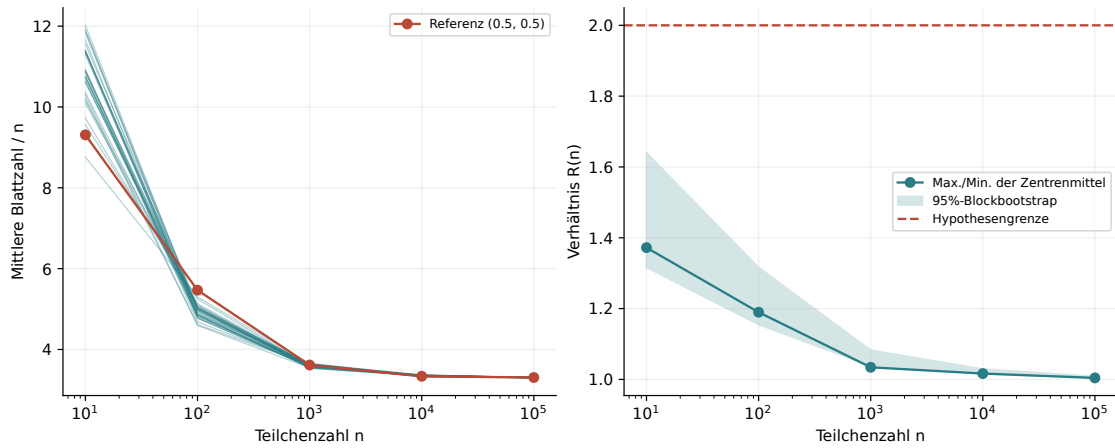


Abbildung 1: Links: je eine Linie pro Zentrum, Referenz hervorgehoben. Rechts: Verhältnis der extremen Zentrenmittel mit explorativem Blockbootstrapbereich.

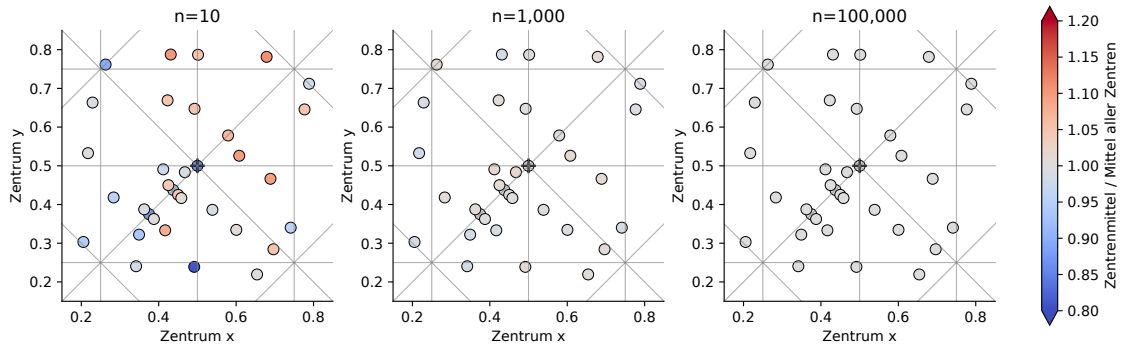


Abbildung 2: Messorte, keine interpolierte Karte. Einheitliche Farbskala; graue Linien: gleichförmiges Gitter auf Tiefe 6. Farben außerhalb des Skalenbereichs werden gesättigt. Die bewusst nahe beieinanderliegenden geometrischen Kontrollorte können sich überdecken.

n	Tiefe 4	Tiefe 6	Tiefe 8	Tiefe 10
10	0,253	0,510	0,368	0,004
100	-0,674	-0,543	-0,597	-0,317
1000	-0,344	-0,021	0,089	-0,030
10000	0,127	0,040	0,106	0,286
100000	-0,443	-0,438	-0,208	0,053

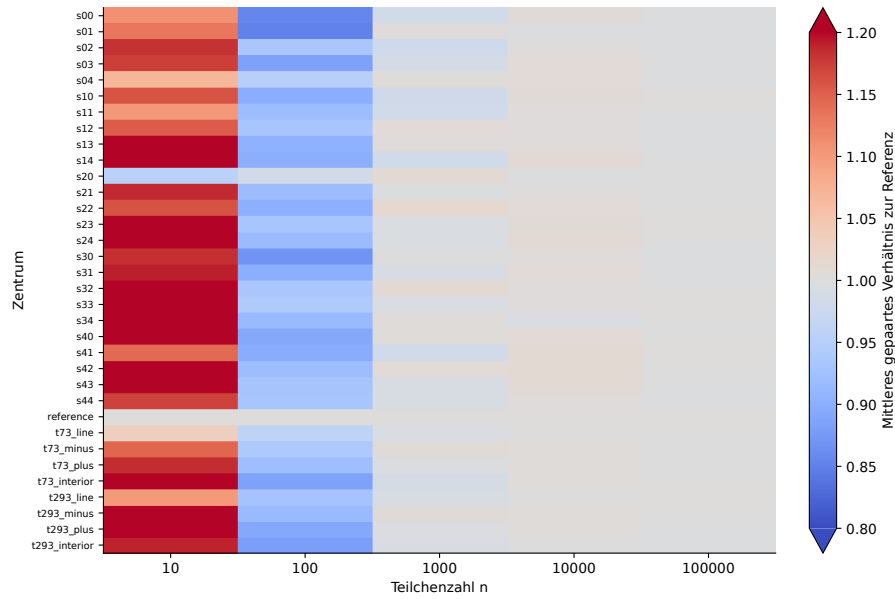


Abbildung 3: Alle Zentren einzeln: mittleres Verhältnis innerhalb derselben Punktwolke zur Referenz. Dies ist nicht das Verhältnis der beiden Mittelwerte.

Explorative Spearman-Korrelation zwischen dem Abstand zur nächsten Gitterkante und der mittleren Blattzahl. Negative Werte bedeuten höhere Blattzahlen nahe Kanten. Die vier Tiefen sind keine unabhängigen Erklärungsvariablen.

6 Einordnung der Hypothese

Alle 1700 geplanten Bäume wurden ohne Abbruch oder Grenzübertritt erzeugt. Alle leichten Prüfungen und die 68 vorab festgelegten Vollprüfungen waren erfolgreich.

Die Verhältnisse der extremen Zentrenmittel betragen ungefähr 1,372; 1,190; 1,034; 1,017 und 1,004 für die aufsteigenden Teilchenzahlen. Bei 10^5 unterscheiden sich die gemessenen extremen Mittelwerte damit nur noch um etwa 0,425 Prozent. Die Daten sind mit der Faktor-zwei-Hypothese für die Erwartungswerte vereinbar, beweisen sie aber nicht. Insbesondere darf die endliche Zentrenauswahl nicht als vollständige Suche über die Ebene gelesen werden.

Die Auswahl von Maximum und Minimum erzeugt eine nach oben gerichtete Verzerrung des beobachteten Unterschieds, auch wenn die wahren Mittel ähnlich sind. Bei $n = 1000$ und $n = 10^5$ liegt sogar das untere Bootstrapquantil knapp oberhalb des Punktschätzers. Der dargestellte Perzentilbereich ist deshalb ausdrücklich eine explorative Resamplingdiagnose, keine belastbar kalibrierte Konfidenzgrenze für den unbekannten Extremquotienten.

6.1 Ein Gegenbeispiel zur stärkeren punkweisen Grenze

Bei $n = 10$, Wiederholung 7, hat dieselbe relative Punktwolke am Zentrum s20 70 Blätter, am Zentrum s34 hingegen 153 Blätter:

$$\frac{153}{70} = 2,185714 \dots > 2.$$

Die exakten Zentren sind

$$c_{s20} = \left(\frac{12889973}{26214400}, \frac{3131323}{13107200} \right), \quad c_{s34} = \left(\frac{8896933}{13107200}, \frac{10242787}{13107200} \right).$$

Beide Fälle wurden nachträglich zusätzlich mit der rationalen Referenzimplementierung rekonstruiert und vollständig validiert; Blattzahlen und exakte Eingabepfsummen stimmen überein. Diese zwei Nachprüfungen sind keine neuen statistischen Wiederholungen. Sie widerlegen nicht die vorab formulierte Erwartungswerthypothese, wohl aber eine ausnahmslose Faktor-zwei-Grenze für jede einzelne Punktwolke unter diesem Design.

6.2 Lage und Geometrie

Für kleine Punktmengen gibt es Hinweise auf einen Lageeffekt. Die explorativen, Holm-korrigierten Permutationswerte sind bei $n = 10$ und 100 klein, bei den größeren Stufen nicht. Wegen der beschriebenen Austauschbarkeitsannahme ist dies keine abschließende inferenzstatistische Absicherung. Ebenso bedeutet ein großer p -Wert nicht, dass sämtliche Zentren exakt gleichwertig wären.

Die einfachen Kantenabstände liefern kein einheitliches Bild: Auf Tiefe 6 ist die Rangkorrelation bei $n = 10$ etwa $+0,51$, bei $n = 100$ hingegen etwa $-0,54$. Eine größenunabhängige Regel „nahe einer Teilungslinie ist immer ungünstig“ wird dadurch nicht gestützt. Auch die Zentren der extremen Mittelwerte wechseln mit der Teilchenzahl. Das bedeutet nicht, dass die Geometrie irrelevant ist, sondern dass der Abstand zu einer einzelnen Hierarchiestufe allein keine allgemeine Erklärung liefert.

6.3 Sinnvolle nächste Untersuchung

Besonders aufschlussreich wäre zunächst die geometrische Rekonstruktion des verifizierten Zehn-Teilchen-Gegenbeispiels: Welche notwendigen Präfixteilungen und welche Konformitätsteilungen unterscheiden sich? Für verallgemeinerbare Aussagen sollten ausgewählte Zentren danach mit neuen unabhängigen Wolken bestätigt werden, getrennt von dieser explorativen Auswahl. Eine dichtere lokale Zentrenabastung kann Hierarchieübergänge sichtbar machen. Millionenläufe erscheinen für diese nächste Fragestellung nicht vorrangig.

7 Reproduktion

Die archivierten Eingaben liegen unter `data/`, Prüfsummen in `manifest.json`, maschinenlesbare Ergebnisse in `results.json`. Einzelprotokolle sind primär; CSV-Dateien erleichtern die Weiterverarbeitung. Im Berichtsverzeichnis regenerieren folgende Schritte Auswertung und Dokument, ohne Experimente erneut zu starten:

```
MPLCONFIGDIR=/tmp/cfk-matplotlib python3 analyze.py
latexmk -pdf -interaction=nonstopmode -halt-on-error Bericht.tex
```

Eine neue Replikation derselben Wolken erfolgt mit den archivierten Quellen und einem neuen, noch nicht bestehenden Ausgabeverzeichnis:

```
python3 data/source/benchmark_centers.py --output /tmp/cfk-g2-replay
```

Die bestehenden Archive werden nicht überschrieben.