

1 Fragestellung und Modell

Wie entwickeln sich zwei ausgedehnte Teilchenwolken in der Umgebung der Lagrange-Punkte L4 und L5 von Sonne und Jupiter? Wir betrachten 10000 masselose Testteilchen in einer Ebene, nicht die reale Asteroidenpopulation. Die Quellen laufen exakt auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Andere Planeten, Exzentrizitaet, Bahnneigung, gegenseitige Wolkenkraefte und Rueckwirkung fehlen. Dies ist das zirkulare eingeschraenkte Dreikoerperproblem.

Wir verwenden AE und julianische Jahre. Mit $g_1 = GM_\odot$, $g_2 = GM_J$, $\mu = g_2/(g_1 + g_2)$ und $a = 5.202887$ AE gilt

$$n = \sqrt{(g_1 + g_2)/a^3}, \quad \mathbf{r}_1 = -\mu a(\cos nt, \sin nt), \quad \mathbf{r}_2 = (1 - \mu)a(\cos nt, \sin nt),$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^2 g_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{x}}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{x}|^3}.$$

Die DE440-Parameter sind $GM_\odot = 1.32712440041279419 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ und $GM_J = 126712764.100000 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$. Der zweite Wert umfasst Jupiters Satellitensystem, hier zu einer Quelle zusammengefasst. Es gelten exakt $1 \text{ AE} = 149597870700 \text{ m}$ und $1 \text{ Jahr} = 365.25 \cdot 86400 \text{ s}$. Der Abstand ist ein kreisfoermig idealisierter J2000-Bahnparameter, keine fuer 1000 Jahre gueltige JPL-Ephemeride (Quellen: JPL, Parameter; JPL, Bahnelemente). Damit folgen $\mu \simeq 0.0009538812$, eine Umlaufzeit von 11.86226 Jahren und eine relative Kreisbahngeschwindigkeit von 13.06406 km/s .

Numerische Umsetzung. Der vorhandene C++-Integrator verwendet Boost.Odeint Dormand-Prince 5(4) mit adaptiver Schrittweite. Die neue Kraftklasse `CircularRestrictedForce` wertet die beiden Quellen direkt aus. Ein CFK-Baum waere hier eine unnoetige Naeherung. Es gibt weder Plummer-Glaettung noch ein Abschneiden entfernter Teilchen. Die Quellen sind Punkte ohne Aufprallmodell. Sehr enge Begegnungen koennen daher numerisch problematisch werden. Alle Teilchen teilen eine adaptive Schrittweite; ein schwieriges Teilchen kann die gesamte Rechnung verlangsamen.

2 Anfangswolken und Erhaltungsdiagnose

Je 5000 Teilchen starten um L4 (+60°, Griechen) und L5 (−60°, Trojaner), jeweils 70 % kompakt und 30 % breit. Die folgende Tabelle beschreibt die Standardabweichungen vor Begrenzung. Mit $v_0 = na$ und heliozentrischem Radius r gilt $v_t = v_0 \sqrt{a/r} + \delta v_t$, $v_r = \delta v_r$; anschliessend werden Ort und Geschwindigkeit der Sonne zum baryzentrischen Zustand addiert.

Groesse	kompakt	breit
Winkel um L4/L5	6°	15°
Relative Radiusstreuung	0.005	0.01
Tangentiale Geschwindigkeitsstreuung/ v_0	0.001	0.002
Radiale Geschwindigkeitsstreuung/ v_0	0.001	0.002

Die Winkel werden bei $\pm 2\sigma$, Radian bei $\pm 3\sigma$ begrenzt (Clipping, keine durch Neuziehen abgeschnittene Normalverteilung). Geschwindigkeitsstoeurungen sind unbeschraenkt normalverteilt. NumPy PCG64, Seed 2026091707, legt die Stichprobe fest.

Die erhaltene Groesse ist die Jacobi-Konstante, nicht die inertielle Teilchenenergie im zeitabhaengigen Feld. Fuer baryzentrische Koordinaten gilt

$$C = 2 \left(\frac{g_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_1|} + \frac{g_2}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_2|} \right) + n^2(x^2 + y^2) - [(v_x + ny)^2 + (v_y - nx)^2].$$

Wir speichern fuer jedes Teilchen den groessten an den Ausgabezeiten gemessenen relativen Fehler $|C(t) - C(0)|/|C(0)|$. Kleine Werte pruefen die Numerik, garantieren aber bei chaotischen Begegnungen keine individuelle Langzeitbahn. Auch minimale Jupiterabstaende sind nur an gespeicherten Zeitpunkten gemessen und koennen engere Begegnungen zwischen Bildern verpassen.

3 Vorversuche und Grenzen der Genauigkeit

Zunaechst wurden breitere Wolken versucht: Winkelstreuung 20° , relative Radiusstreuung 0.04, tangentielle/radiale Geschwindigkeitsstreuung 0.006/0.005 in Einheiten v_0 . Ein erster Ansatz begrenzte die Winkel bei 3σ . Der breite Rand reichte bis zur Jupiterlaenge; einzelne Teilchen starteten unerwuenscht als nahe Jupiterbegleiter. Die Gesamtrechnung brach nach etwa 1.54 Jahren mit Schrittweitenunterlauf ab. Ein gesonderter Versuch mit den zwolff anfangs naechsten Teilchen reproduzierte den Fehler.

Ein zweiter Ansatz begrenzte die Winkel auf $\pm 2\sigma$, also maximal 40° um L4/L5. Der Vorlauf aller 10000 Teilchen ueber 100 Jahre gelang in 129.8 Sekunden. Der groesste relative Jacobi-Fehler war $5.66 \cdot 10^{-7}$; das 99 %-Quantil der teilchenweisen Maxima lag bei $8.47 \cdot 10^{-14}$. Der Hauptlauf brach jedoch bei etwa 309 Jahren erneut mit Schrittweitenunterlauf ab. Bereits zuvor lagen einzelne Jacobi-Fehler im Bereich 10^{-3} . Eine gezielte Nachrechnung der 16 schwierigsten Vorlaufteilchen mit strengeren Toleranzen ergab Positionsunterschiede bis $7.03 \cdot 10^{-4}$ AE ueber 100 Jahre. Der kleine Pilot hatte diese Schwierigkeiten nicht vollstaendig erfasst. Alle Fehlversuche bleiben erhalten.

Konsequenz: Fuer die Filme dient eine dritte, engere Anfangswolke gemaess Tabelle auf Seite 1. Damit wird eine andere Anfangswertaufgabe untersucht, nicht die breite Rechnung nachtraeglich als erfolgreich erklaert. Die Kraft bleibt unveraendert und ungeklaert; es werden keine Teilchen entfernt. Eine belastbare Untersuchung extremer Nahbegegnungen braucht Regularisierung bzw. angepasste lokale Fehlerkontrolle und gegebenenfalls ein physikalisches Aufprallmodell. Das ist hier noch nicht implementiert.

Zwei exakt im Gleichgewicht gestartete Teilchen wurden 1000 Jahre integriert. Die maximale Positionsabweichung im rotierenden System betrug $2.58 \cdot 10^{-10}$ AE, der relative Jacobi-Fehler $3.12 \cdot 10^{-16}$. Die L4/L5-Punkte sind fuer dieses Massenverhaeltnis linear stabil. Die kleine langsame Librationsfrequenz ist

$$\omega_{\text{lib}} = n \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}},$$

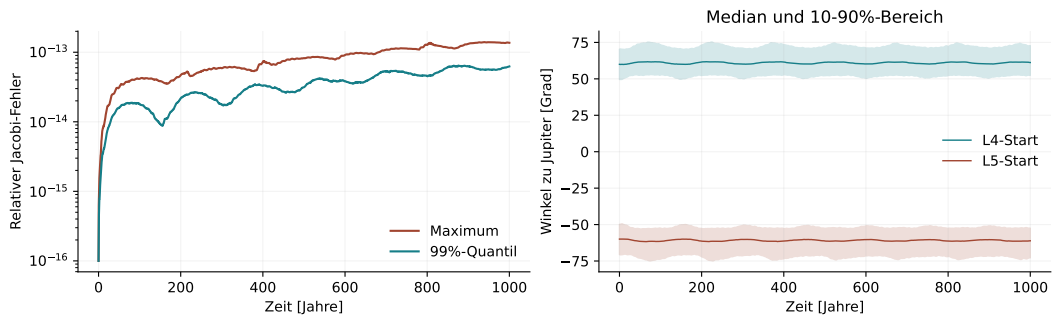
also eine Periodendauer von rund 147 Jahren. 1000 Jahre erfassen mehrere solcher Schwingungen. Diese lineare Aussage gilt nicht fuer beliebig grosse Stoerungen (Herleitung: Fitzpatrick, Stabilitaet der Lagrange-Punkte).

Der Pilot der dritten Serie mit 128 festen Teilchen-IDs vergleicht relative Toleranzen 10^{-10} und 10^{-12} , absolute Toleranzen 10^{-12} und 10^{-14} , maximale Schritte 0.1 bzw. 0.05 Jahre. In den ersten 100 Jahren unterscheiden sich die Positionen maximal um $1.90 \cdot 10^{-8}$ AE. Nach 1000 Jahren liegen Median und Maximalwert der Endabweichung bei $7.63 \cdot 10^{-9}$ bzw. $1.47 \cdot 10^{-7}$ AE. Die maximalen relativen Jacobi-Fehler betragen $3.71 \cdot 10^{-12}$ bzw. $2.72 \cdot 10^{-14}$. Die Pilotteilchen kommen Jupiter an den Ausgabezeiten nicht naeher als etwa 2.44 AE. Der Hauptlauf verwendet $\text{rtol} = 10^{-11}$, $\text{atol} = 10^{-13}$, maximal 0.1 Jahre pro Schritt, einen Rechenthread und Ausgaben alle 0.5 Jahre.

4 Ergebnisse und Darstellung

Groesse	Hauptlauf
Teilchen, Endzeit	10000, 1000 Jahre
Native Laufzeit	226.1 s
Akzeptierte / verworfene Schritte	56907 / 0
Maximaler relativer Jacobi-Fehler	$1.400 \cdot 10^{-13}$
99 %-Quantil der Teilchen-Maxima	$7.111 \cdot 10^{-14}$
Kleinsten gespeicherter Jupiterabstand	1.775876 AE
Am Ende im L4-/L5-Fenster	4991 / 4992
Bahnen mit Jacobi-Fehler $> 10^{-5}$ / $> 10^{-3}$	0 / 0

Die 128 Referenzteilchen unterscheiden sich zwischen Hauptlauf und strengerer Referenz ueber alle gespeicherten Zeiten maximal um $6.495 \cdot 10^{-9}$ AE. Dies ist eine Stichprobenpruefung, keine Fehlerschranke fuer jede Bahn. Die Tabelle zaehlt auch Bahnen oberhalb zweier offengelegter Diagnoseschwellen. Ein kleiner Jacobi-Fehler allein ist kein Beweis fuer Bahngeauigkeit. Die Filme demonstrieren die Entwicklung der gewaehlten Wolke und ersetzen keine Untersuchung realer Asteroiden oder einer Fluchtrate.



Die Fensterzaehlung bedeutet lediglich: Radius innerhalb $0.8a$ bis $1.2a$ und Winkel innerhalb 60° um den jeweiligen Lagrange-Punkt. Sie ist keine Bahnklassifikation und keine dauerhafte Bindungsquote. Die Farben kennzeichnen stets die urspruengliche Population, nicht den aktuellen Ort.

5 Filme, Tests und Reproduktion

Die Filme liegen unter `libration/presentation/feste_achsen.mp4` und `libration/presentation/mitrotierend.mp4`. Die beiden Filme verwenden dieselben 2001 gespeicherten Zustände. Beide zeigen sonnenzentrierte Koordinaten $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{r}_1(t)$. Im zweiten Film wird zusätzlich $\mathbf{q}' = R(-nt)\mathbf{q}$ dargestellt; Jupiter bleibt damit bei $(a, 0)$. Achsengrenzen von ± 8 AE sind fest. Teilchen ausserhalb des Ausschnitts bleiben in der Rechnung und werden explizit gezählt. Das Winkelhistogramm zeigt nur $0.8a < r < 1.2a$ und hat eine feste Skala. Vier feste Beispiel-IDs illustrieren Winkelschwingungen. Die Marker der Quellen sind nicht massstäblich. Es gibt keine zeitliche Interpolation, 30 Bilder/s sowie eine kurze Anfangs- und Endpause.

Die bestehenden drei nativen Testsuiten bestehen im Release-Build und mit AddressSanitizer/UndefinedBehaviorSanitizer und OpenMP (Leak-Prüfung deaktiviert). Neue Tests prüfen L4/L5-Beschleunigungen, Jacobi-Erhaltung, Neustart bei absoluter Zeit, erlaubte Massen, Quellenkontakt und identische Kräfte mit einem bzw. vier Threads. Drei Python-Tests prüfen deterministische Wolken, Gruppen und Grenzen sowie die Bezugssystemtransformation. Die gespeicherten Endpositionen stimmen exakt mit der nativen Enddatei überein. Beide Videos werden vollständig dekodiert und ihre Bildzahlen geprüft. Die Doxygen-Dokumentation wurde mit der neuen Modellbeschreibung und API-Referenz erzeugt.

5.1 Ablage und Wiederholung

Der Versuch liegt unter `CFK/Berichte/2026-09-17/Trojaner_G1`. Das Unterverzeichnis `libration` ist die dritte Serie und Grundlage der Filme. Die erste Serie liegt im Wurzelverzeichnis, die zweite unter `bounded`. Konfiguration, Anfangszustände, Aufrufe, native Laufmetadaten, Quellshots, Binary und Compilerflags bleiben erhalten. Der Release-Build verwendet GCC 13.3, Boost 1.83, `-O3 -DNDEBUG -ffp-contract=off`, kein Fast-Math. Die Sicherheitskopie vor dieser Erweiterung liegt in `CFK/Sicherungen/2026-09-17_vor_Trojaner.tar.gz`.

`CPP/docs/trojans.md` beschreibt Modell und Aufrufe. Vom CPP-Verzeichnis aus erzeugt `python/trojan_experiment.py` mit `-phase pilot` und anschliessend `-phase main` einen neuen Versuch. Beide Aufrufe benötigen denselben absoluten `-root`-Pfad; dieser darf vor dem Pilot noch nicht existieren. `python/render_trojans.py--root...` erzeugt die Filme. Rohdaten enthalten Positionen und Geschwindigkeiten aller Teilchen.

Die verlustfreie Zstandard-Archivierung umfasst 18 grosse Dateien. Sie reduziert 2.689 GiB auf 1.343 GiB, eine Ersparnis von 1.347 GiB. Vor Entfernen jedes Originals wurde der vollständig dekodierte Strom per SHA-256 mit dem Original verglichen. Auch Fehlversuche bleiben erhalten. Das Journal liegt unter `archive/journal.jsonl`. Zur Wiederherstellung dient `archive/archive_lossless.py` mit `-mode restore`, dem absoluten Versuchspfad als `-base` und dessen Unterordner `archive` als `-ledger`. Vor erneuter Darstellung sind die Rohdaten und gegebenenfalls `positions.npy` wiederherzustellen. Keine Teilchen oder Zeitschritte wurden zur Platzersparnis verworfen. Die reproduzierbare Stichprobe und alle Parameter sind festgelegt; bitweise gleiche adaptive Langzeitbahnen auf anderen Compilern oder CPUs werden nicht garantiert. Insbesondere nach chaotischen Begegnungen sind statistische bzw. geometrische Aussagen robuster als die Identität einer einzelnen Endposition.