

Erster Prototyp zur Zeitintegration

17. September 2026

1 Modell und Aufbau

Punktmassen bewegen sich in einer Ebene unter Newtonscher Gravitation. Dies ist nicht das logarithmische Potential einer rein zweidimensionalen Poisson-Gleichung. Massen bleiben konstant, Teilchen-IDs stabil. Die Simulation verwendet reale Teilchenpositionen, keine Dreiecksschwerpunkte.

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = G \sum_{j \neq i} m_j \frac{x_j - x_i}{(|x_j - x_i|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}.$$

Alle Versuche hier haben $G=1$ und $\epsilon=0$. Die Schnittstelle bietet optional eine feste Plummer-Glaettungslaenge; deren Wahl bleibt eine offene physikalische Entscheidung. Eine Plummer-Anfangsverteilung ist etwas anderes und wird hier nicht verwendet. Es gibt keine Kollisionserkennung, Verschmelzung oder Regularisierung. Zustand, Kraftauswertung, Integrator und Diagnostik sind getrennt. DirectForce verwendet direkte Summation; CFKForce baut bei jeder Auswertung ein neues Gitter mit aktuellen Schwerpunkten. Verlassen des festen Wurzeldreiecks fuehrt zu einer Fehlermeldung, nicht zu einer Reflexion. DOP853 kann auch an internen Probestufen ausserhalb des Gebiets stoppen.

2 Integratoren

KDK-Leapfrog verwendet konstantes h :

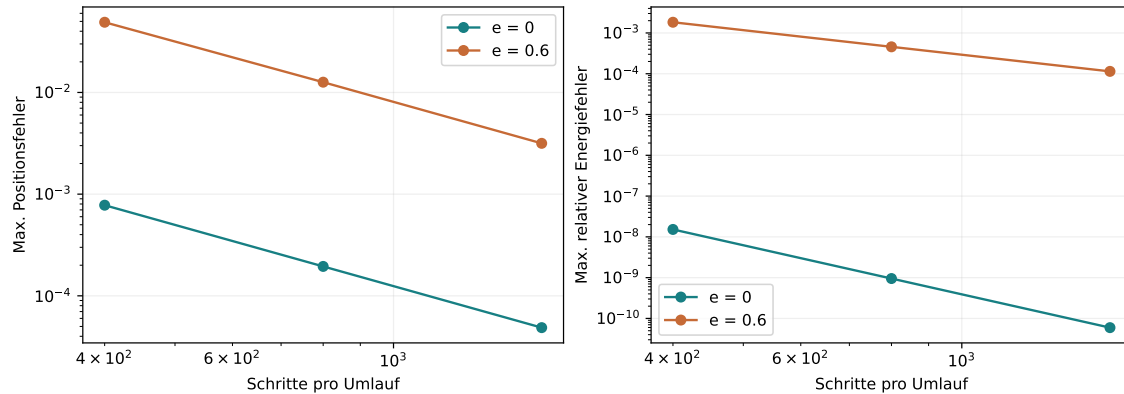
$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2} a(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + h v_{n+1/2}, \quad v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{h}{2} a(x_{n+1}).$$

Nach der Initialisierung ist eine neue Kraftauswertung pro Schritt notwendig. Ausgaben liegen auf dem Schrittgitter; es werden keine Schritte fuer Filmframes verkuerzt. DOP853 aus SciPy ist eine adaptive Referenz achter Ordnung ($\text{rtol}=1\text{e-}11$, $\text{atol}=1\text{e-}13$; Wolkenreferenz $1\text{e-}12$ und $1\text{e-}14$). Seine Ausgabezeitpunkte werden durch die eingebaute dichte Ausgabe bedient. Die Fehlerkontrolle betrifft Zeitintegration, nicht den Fehler der Baumkraefte. Leapfrog ist fuer exakte Hamiltonsche Kraefte bei festem Schritt symplektisch, aber nicht exakt energieerhaltend. Der einseitige CFK-Kraftbaum garantiert weder paarweise Gegenkraefte noch einen gemeinsamen Potentialgradienten. Fuer das Gesamtsystem wird deshalb keine strikte Symplektizitaet behauptet.

3 Analytische Pruefung

Zwei Massen von je 0.5, Schwerpunkt (0.5,0.5), relative grosse Halbachse $a=0.3$, Start im Perizentrum. Kreisbahn und Ellipse ($e=0.6$) werden jeweils zehn Umlaeufe integriert. Die analytische Referenz loest die Kepler-Gleichung. Positionsfehler sind maximale euklidische Teilchenabstaende zur Referenz an den jeweiligen Ausgabezeitpunkten; Energiefehler werden gegen den Anfangswert gemessen.

e	Methode	Schritte/T	Positionsfehler	rel. Energiefehler
0	KDK	400	7.79e-04	1.52e-08
0	KDK	800	1.95e-04	9.51e-10
0	KDK	1600	4.87e-05	5.95e-11
0	DOP853	adaptiv	7.71e-11	1.50e-10
0.6	KDK	400	4.90e-02	1.83e-03
0.6	KDK	800	1.26e-02	4.57e-04
0.6	KDK	1600	3.16e-03	1.14e-04
0.6	DOP853	adaptiv	1.26e-09	1.84e-10



Halbierung der Schrittweite soll im asymptotischen Bereich die Fehler zweiter Ordnung etwa vierteln. Energie allein genuegt nicht: auch Phasen- und Positionsfehler muessen betrachtet werden. Die Tests pruefen zusaetzlich Zeitumkehr, Neustarts, freie Bewegung, Impuls und Drehimpuls, unguelte Eingaben, beide Baum-Oeffnungskriterien und den Gradienten des geglaetteten Potentials. Die Kreisbahn zeigt beim Energiefehler einen Spezialfall mit etwa Faktor 16 statt vier. Ihr Positionsfehler bleibt zweiter Ordnung; aus der besonders guten Kreisbahnenergie darf keine hoehere allgemeine Methodenordnung gefolgert werden.

4 Mehrkoerperstest und Film

Ein 6x6-Punktgitter in $[0.25, 0.75]$ zum Quadrat wird mit Seed 1729 um gleichverteilte Verschiebungen in $[-0.015, 0.015]$ gestoert. Die 36 Massen sind gleich und summieren sich zu eins; Anfangsgeschwindigkeiten sind null. Dies ist ein kurzer Nichtgleichgewichtstest, kein stabiles Galaxienmodell. Bis $t=0.02$ werden CFK-Laeufe mit Theta 0, 0.3 und 0.6 und $h=0.0005$ gegen direkte DOP853-Kraefte verglichen. Rohdaten enthalten getrennte Positions-, Energie-, Impuls- und Drehimpulsfehler.

θ	Positionsfehler	rel. Energiefehler	Impulsfehler
0	7.87e-09	4.22e-08	2.39e-17
0.3	8.83e-07	1.57e-07	2.79e-06
0.6	1.52e-05	4.18e-06	1.35e-04

Der Film zeigt zwei Umlaeufe der $e=0.6$ -Bahn mit CFK und KDK, $h=T/2400$. 241 Frames sind echte Simulationszustaende im Abstand von 20 Schritten; es gibt keine kuenstliche Zwischenbil-dinterpolation. Das Gitter wird aus den gespeicherten Positionen rekonstruiert. Die gestrichelten Bahnen sind analytisch; rechts steht die gemessene Energiedifferenz. Die Wiedergabe mit 30 Bildern pro Sekunde ist nur eine Darstellungswahl. Der maximale relative Energiefehler des Film-laufs ist $5.079e-05$; der maximale Positionsfehler $2.809e-04$. Bei zwei Teilchen gibt es keine akzeptierten Mehrteilchencluster: der Film validiert deshalb noch nicht die Baumapproximation grosser Systeme.

5 Reproduktion und Grenzen

Alle Zustaende und Diagnosen liegen als NPZ vor, Kennzahlen und Versionen in results.json, Tests in tests.log. Der Quellstand und die LaTeX-Vorlage sind unter source eingefroren. manifest.json enthaelt SHA-256-Pruefsummen. Ein neuer Ausgabeordner ist zwingend. Laufzeiten sind Einzelmessungen, keine Performance-Studie. Diagnosekosten sind nicht in der Integrationszeit enthalten.

```
python3 source/experiment_dynamics.py --output /tmp/dyn_g1_neu
```

Die Reproduktion benoetigt Python, NumPy, SciPy, Matplotlib, FFmpeg und pdflatex. Fuer andere Systeme werden die dokumentierten Versionen empfohlen. Die Diagnostik berechnet das direkte Paarpotential und kostet quadratisch in der Teilchenzahl. Sie ist fuer kleine Referenzprobleme gedacht. Noch offen: dynamisches Rechengebiet, enge Begegnungen, physikalische Glaettung, geeignete Gleichgewichtsverteilungen, hierarchische Zeitschritte und eine direkte Anbindung des C++-Kraftbaums. Zunaechst sollten stabile Mehrkoerpermodelle und getrennte Konvergenzreihen fuer Zeitschritt und Baumoeffnung folgen. Verteilte Dreiecksmassen und Gas sind nicht implementiert.