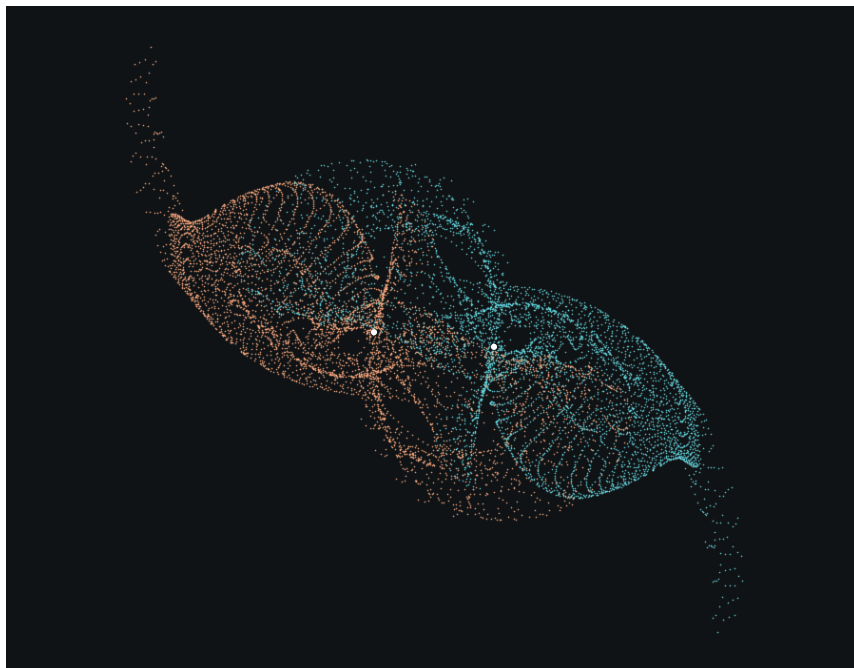


PASCAL BAUER

Von der Integer-codierten Triangulation zum selbstgravitierenden Gas

Eine unabhängige Forschungsarbeit
mit Hilfe von ChatGPT



Von der Baumgeometrie über numerische Experimente
zur kritischen Einordnung KI-gestützter Forschung

DEUTSCHE ARBEITSFASSUNG 0.3

18. SEPTEMBER 2026

Charakter und Stand der Arbeit

Diese Arbeit dokumentiert eine selbständige und unabhängige Forschungsarbeit von Pascal Bauer, ausgeführt mit Hilfe von ChatGPT und dessen programmiergestützter Arbeitsumgebung. Sie ist keine universitäre Qualifikationsschrift und beansprucht keine institutionelle Begutachtung. Die Verantwortung für die spätere Veröffentlichung und die Freigabe ihrer Aussagen liegt beim menschlichen Autor. Das Sprachmodell wird als Werkzeug und als dokumentierte Quelle von Vorschlägen, nicht als verantwortlicher wissenschaftlicher Mitautor geführt.

Dies ist eine ausgearbeitete, noch nicht publikationsfertige Arbeitsfassung.

Sie enthält Theorie, Implementierungsbeschreibung, Versuchsdiskussion, Prozessanalyse und Ausblick. Vor einer Veröffentlichung stehen insbesondere eine vollständige unabhängige Reproduktionsprüfung, abschliessende Literatur- und Rechtekontrolle sowie die Freigabe durch den Autor aus. Die Versuchsdarstellung bezieht sich auf archivierte Entwicklungsstände, nicht auf eine erneute Prüfung sämtlicher Fälle mit der aktuellen Software.

Die Diplomarbeit von 2004 dient als historischer und gestalterischer Bezug, nicht als Ersatz für die Originalliteratur der verwendeten Methoden. Die neue Darstellung folgt dem Weg von der Fragestellung über mathematische Konstruktion und Implementierung zu überprüfbaren Versuchen. Sie ergänzt diesen Weg um die Herkunft der Ideen, Fehlversuche und die Grenzen der KI-gestützten Entwicklung.

Zusammenfassung

Diese selbständige und unabhängige Forschungsarbeit untersucht anhand einer dokumentierten Fallstudie, wie weit sich eine numerische Forschungsfrage mit Hilfe von ChatGPT bearbeiten lässt. Ausgangspunkt ist eine Integer-codierte binäre Triangulation; Zielrichtung ist ein Hydrodynamikcode für selbstgravitierendes Gas. Der historische Bezug zu einer früheren Diplomarbeit motiviert die Frage nach dem beschleunigten Entwicklungsprozess, erlaubt jedoch keinen kontrollierten quantitativen Produktivitätsvergleich.

Für eine festgelegte zweidimensionale Bisectionsregel werden die geometrische Bedeutung der Bitpfade, Nachbarsuche und konformer Abschluss erläutert. Darauf bauen Teilchenbäume, approximative Gravitation sowie Finite-Volumen-Verfahren für die Eulergleichungen auf. Die Darstellung umfasst Riemannflüsse, begrenzte lineare Rekonstruktion unter Einbeziehung reiner Ecknachbarn, konservative Gittertransfers und die Parallelisierung ausgewählter Operatoren. Die experimentelle Kopplung von Hydrodynamik und Selbstgravitation wird getrennt von den bereits geprüften Einzelbausteinen bewertet.

Die Versuche zeigen sowohl Verbesserungen als auch verbleibende Grenzen. Im untersuchten Sod-Vergleich verringert lineare Rekonstruktion den Dichtefehler gegenüber konstanten Zellzuständen um etwa 34–42%, abhängig von Orientierung und Gitter. In den Scheibenruheläufen sinkt die relative Dichteänderung über eine dynamische Zeit von etwa 1.97% bei 16384 Zellen auf 0.69% bei 65536 Zellen. Langfristige Gleichgewichtserhaltung und konsistente Energie bei gravitativen Gitterwechseln bleiben offen.

Die Prozessanalyse rekonstruiert die Arbeitsteilung anhand konkreter Entscheidungen, einschliesslich verworfener Ansätze. Eine allgemeine Zeitersparnis lässt sich daraus nicht quantifizieren. Der Ausblick benennt die Voraussetzungen für dreidimensionale Modellstudien zu Kollisionen und selbstgravitierenden Objekten, insbesondere bei Bitgeometrie, Konformität und gravitativer Energiekopplung.

Schlüsselbegriffe: Integer-codierte Triangulation, konformer Baum, Finite Volumen, Eulergleichungen, Selbstgravitation, Parallelisierung, KI-gestützte Forschung.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	iii
1. Fragestellung und Arbeitsweise	1
1.1. Eine dokumentierte Fallstudie	1
1.2. Was als Fortschritt zählt	1
1.3. Chronologischer Aufbau	1
1.4. Zwei miteinander verbundene Untersuchungsziele	2
1.5. Abgrenzung des Gegenstands	3
1.6. Vorgehen und Kriterien	3
1.7. Leseführung und Grenzen der Rekonstruktion	3
2. Geometrie und Integer-codierter Baum	5
2.1. Literaturbezug und mathematischer Rahmen	5
2.2. Eine festgelegte Hierarchie	6
2.3. Adressen und Geometrie	7
2.3.1. Schwerpunkt, Normalen und exakte Arithmetik	8
2.4. Nachbarn: Adresse ist nicht Existenz	9
2.4.1. Vollständige Übergangsregel	10
2.4.2. Ein kleines Beispiel	11
2.5. Teilungsmenge und Konformitätsabschluss	11
2.5.1. Konformität als geometrische Eigenschaft	11
2.5.2. Minimalität, Terminierung und Vereinigung	12
2.5.3. Vergrößerung	14
2.6. Teilchenpfade	14
2.6.1. Herleitung des Koordinatenwechsels	14
2.6.2. Minimaler Baum für eine Punktmenge	15
2.7. Das aktive Blattgitter als numerische Schnittstelle	16
2.7.1. Tiefenunterschiede an gemeinsamen Kanten	16
2.7.2. Vom uniformen zum aktiven Nachbarn	17
2.7.3. Ecksterne ohne Koordinatensuche	17
2.7.4. Konservative Restriktion und stabile Identitäten	18
2.8. Komplexität, Grenzen und Verifikation	18
2.8.1. Kostenmodell	18

2.8.2. Unabhängige Prüfungen	19
3. Statistische Gitterversuche	20
3.1. Fragestellung und Messgrößen	20
3.1.1. Struktur und Auflösung	20
3.1.2. Replikation und Kontrolle	21
3.2. U1: Gleichverteilung als Ausgangspunkt	21
3.3. G1: Konzentration um ein festes Zentrum	22
3.3.1. Verteilung und Versuchsplan	22
3.3.2. Blattzahl und Konformitätsaufwand	22
3.3.3. Eine lokale Erklärung der Tiefenverschiebung	24
3.4. G2: Einfluss der Zentrenlage	24
3.4.1. Exakt gepaarte Verschiebungen	24
3.4.2. Mittelwerte und ein Gegenbeispiel	25
3.4.3. Statistische Einschränkungen	27
3.5. G3: Mehrere Cluster und ungleiche Besetzung	27
3.5.1. Design	27
3.5.2. Ergebnisse und Tiefeninterpretation	28
3.6. Einordnung und Reproduzierbarkeit	28
4. Baumgravitation und Teilchendynamik	31
4.1. Physikalisches Modell und Erhaltungsgrößen	31
4.1.1. Glättung ist Teil des Modells	32
4.1.2. Massive und masselose Teilchen	32
4.2. Was die Codierung leisten kann	32
4.2.1. Massenaggregation und Monopolnäherung	32
4.2.2. Öffnungsentscheidung und Selbstkraft	33
4.2.3. Algorithmus und Aufwand	34
4.3. G4: Statischer Kraftvergleich	34
4.4. Zeitintegration und getrennte Fehlerquellen	36
4.4.1. Kick–Drift–Kick	36
4.4.2. DYN_G1: analytischer Zweikörpertest	36
4.5. DYN_G2: Ringe, Kollaps und Geometrieabhängigkeit	38
4.5.1. Ein Ring ist nicht schon durch seine Form validiert	38
4.5.2. Kalte Scheibe und diskrete Symmetrie	38
4.5.3. Übertragung nach C++	39
4.6. Glättungsreihe und Begegnungsdemonstration	39
4.6.1. Plummer_G1: gleiche Physikparameter, getrennte Genauigkeits- kontrolle	39
4.6.2. Galaxy_Demo: sichtbare Gezeiten statt realistischer Galaxie	40
4.7. Trojaner: ein anderes dynamisches Modell	40

4.8.	Gravitierende Kleinkörper im Sonnensystem	44
4.8.1.	Modell, Aufteilung und Ereignisse	44
4.8.2.	Zeitschrittversuch und Nachlauf	44
4.9.	Offene dynamische Fragen	45
5.	Implementierung und Parallelisierung	46
5.1.	Schichten und Zuständigkeiten	46
5.2.	Parallelität als messbare Eigenschaft	46
5.3.	Parallele Konstruktion und Konformität in Python	47
5.3.1.	Geometrische Aufgaben statt beliebiger Teilchenpakete	47
5.3.2.	Die entscheidende Vereinigungseigenschaft	48
5.3.3.	Knoten vereinigen, nicht Blätter	48
5.3.4.	Prozesskosten und experimenteller Nachweis	49
5.4.	C++: Blattzuordnung im fertigen Gitter	50
5.5.	Parallelität der Kraftbaumvorbereitung	52
5.5.1.	Unabhängige Knoten nach abgeschlossener Indexierung	52
5.5.2.	Aggregation von unten nach oben	52
5.5.3.	Geometrie von oben nach unten	53
5.5.4.	Threadgewinn und Datenstrukturgewinn	53
5.6.	Kraftberechnung: unabhängige Ziele, dynamische Pakete	54
5.7.	Hydrodynamik: parallele Operatoren ohne Schreibkonflikte	55
5.7.1.	Rekonstruktion mit überlappenden Lesebereichen	55
5.7.2.	Ein Fluss pro Kante, danach Einsammeln pro Zelle	55
5.7.3.	Adaptation: Felder und Topologie unterscheiden	56
5.7.4.	Hydro-Skalierung auf dreihedren	56
5.8.	Grenzen, Nachweise und offene Aufgaben	57
5.8.1.	Kostenmodell und Reproduzierbarkeit	57
5.8.2.	Arbeitsauftrag: paralleler Abschluss in C++	58
5.9.	Herkunft und Implementationsnachweis	58
6.	Finite Volumen auf dem Blattgitter	59
6.1.	Fragestellung und physikalisches Modell	59
6.1.1.	Zustand, Druck und Energie	59
6.1.2.	Die drei Erhaltungssätze	60
6.2.	Von der Integralbilanz zur Zellgleichung	60
6.3.	Wellen, Schocks und das Riemannproblem	62
6.3.1.	Was sich über eine Kante ausbreitet	62
6.3.2.	Warum die Differentialform allein nicht genügt	62
6.4.	Drei untersuchte numerische Flüsse	63
6.4.1.	Rusanov: eine gemeinsame Dissipationsgeschwindigkeit	63
6.4.2.	Roe: Dissipation nach charakteristischen Wellen	63

6.4.3.	HLLC: den Kontakt im Wellenmodell erhalten	64
6.5.	Lineare Rekonstruktion mit dem CFK-Baum	65
6.5.1.	Was MUSCL verbessert	65
6.5.2.	Ecksterne durch Transport lokaler Indizes	67
6.5.3.	Least Squares und affine Exaktheit	69
6.5.4.	Komponentenweiser Eckbegrenzer	69
6.5.5.	Gemeinsame Positivitätsskalierung und ihr Beweis	70
6.6.	Zeitintegration, CFL und Randbedingungen	71
6.6.1.	Methode der Linien und SSP-RK2	71
6.6.2.	Der tatsächlich verwendete globale Zeitschritt	71
6.6.3.	Randzustände sind Teil des Modells	72
6.7.	Konservative Änderung des Blattgitters	72
6.8.	Referenzlösungen und Fehlerbegriffe	73
6.8.1.	Welche Grösse wird verglichen?	73
6.8.2.	Der Sod-Test: eine berechenbare exakte Referenz	74
6.9.	Chronologische Validierung des Hydrooperators	75
6.9.1.	Vom diffusen Ausgangsverfahren zu Roe und HLLC	75
6.9.2.	Lineare Rekonstruktion mit Ecknachbarn	76
6.10.	Echt zweidimensionale Belastungsproben	79
6.10.1.	Kreisförmiger Drucksprung	79
6.10.2.	Sedov–Taylor: Ähnlichkeit und Referenzprofil	79
6.10.3.	Was die tatsächlichen Explosionsläufe prüfen	80
6.11.	Zeitlich adaptive Gitter: ein eigener Validierungsschritt	81
6.12.	Zusammenspiel der Operatoren	84
6.13.	Herkunft, Aussagegrenzen und Anschlussfragen	84
7.	Selbstgravitation und hydrostatische Ruhe	86
7.1.	Fragestellung und Modellentscheidung	86
7.1.1.	Eine Massenschicht, keine zweidimensionale Kugel	86
7.2.	Euler-Gleichungen mit Gravitationsquelle	87
7.2.1.	Die innere Energie als lokale Kontrollgrösse	87
7.2.2.	Die kontinuierliche Gesamtenergiebilanz	87
7.3.	Vom Gasgitter zum Kraftbaum	88
7.3.1.	Zellmassen als Punktquadratur	88
7.3.2.	Selbstkraft und diagonale Energie	88
7.4.	Untersuchte Quellenkopplungen	89
7.4.1.	Zellarbeit und massenflussgekoppelte Arbeit	89
7.4.2.	Warum kleinere Schritte nicht immer helfen	90
7.4.3.	Experimenteller Nachbarenergieaustausch	90
7.4.4.	Impulskonsistenter Kick	90

7.5.	Hydrostatische Profile ohne Kugelschalentheorem	91
7.5.1.	Abgrenzung zum Lane–Emden-Problem	91
7.5.2.	Dichte vorgeben und Druck integrieren	92
7.5.3.	Quadratur und Virialkontrolle	92
7.6.	Kontinuierliches und diskretes Gleichgewicht	93
7.7.	Versuchsfolge und negative Befunde	94
7.7.1.	Erste Kopplung und Parameterstudien	94
7.7.2.	Der druckarme Rand als isolierter Fehlerfall	94
7.7.3.	Austausch und Kick als Gegenproben	95
7.8.	Abgeschlossene längere Ruheläufe	95
7.8.1.	Definition der Diagnosen	96
7.8.2.	Vergleich und Datenkontinuität	97
7.9.	Kollisionen und die Grenzen einer Demonstration	97
7.10.	Implementierung, offene Schritte und Herkunft	100
8.	Versuchsregister und Aussagekraft	101
8.1.	Was die Versuche nachweisen sollen	101
8.1.1.	Vier Arten von Evidenz	101
8.1.2.	Prüfvertrag und Bewertung	102
8.2.	Messgrößen und faire Vergleiche	102
8.2.1.	Bilanzrest und Lösungsfehler	102
8.2.2.	Gittervergleich und beobachtete Ordnung	103
8.2.3.	Reproduzierbarkeit und Laufzeit	103
8.3.	Chronologisches Register	103
8.3.1.	V1: Adressgeometrie und Konformität	104
8.3.2.	V2: Statistische Gitterstruktur	105
8.3.3.	V3: Baumkräfte und Teilchendynamik	106
8.3.4.	V4: Rekonstruktion vor der nichtlinearen Strömung	108
8.3.5.	V5: Eulerwellen und zweidimensionale Belastungen	110
8.3.6.	V6: Anpassung, Portierung und Parallelisierung	112
8.3.7.	V7: Selbstgravitation und hydrostatische Ruhe	114
8.3.8.	V8: Lange Kollision und Rechenzeitgrenze	116
8.4.	Belastbare und offene Aussagen	117
8.5.	Ausfälle und wissenschaftliche Nachvollziehbarkeit	117
8.5.1.	Nicht jedes Ende ist dasselbe Ereignis	117
8.5.2.	Was eine Prüfsumme belegt	118
8.6.	Was Abbildungen und Filme beitragen	118
8.7.	Konsequenzen und Herkunft	118
9.	Diskussion des Entwicklungsprozesses	119
9.1.	Fragestellung der Prozessanalyse	119

9.2.	Quellenlage und analytische Methode	119
9.2.1.	Gespräch, Artefakt und Messung	119
9.2.2.	Zuordnung von Entscheidungen	120
9.3.	Arbeitsteilung und konzeptionelle Beiträge	121
9.3.1.	Was der Autor einbrachte	121
9.3.2.	Was ChatGPT beitrug	121
9.3.3.	Literatur und gemeinsame Ausarbeitung	122
9.4.	Entscheidungssituationen als Fallanalysen	122
9.4.1.	Die diffuse Schockfront: ein Einwand wird zum Vergleich	122
9.4.2.	Ecknachbarn: eine Idee verändert nicht jede Gleichung	123
9.4.3.	Negative Drücke: ein guter Globalwert reicht nicht	123
9.4.4.	Parallelisierung: derselbe Begriff bezeichnet verschiedene Teile	124
9.4.5.	Lange Kollision: Budgetgrenze wird zur Erkenntnisgrenze	124
9.5.	Aufwand: Was gemessen ist und was fehlt	124
9.5.1.	Vier Zeitbegriffe und eine fehlende Gegenprobe	124
9.5.2.	Quantitative Beispiele mit begrenzter Bedeutung	125
9.5.3.	Warum kein Faktor gegenüber dem Diplomarbeitsjahr folgt	126
9.6.	Exaktheit und die Rolle unabhängiger Kontrolle	126
9.6.1.	Abgestufte Absicherung statt eines Gütesiegels	126
9.6.2.	Gemeinsame Fehlerquellen von Erzeugung und Prüfung	127
9.7.	Verständnis als Ergebnis und als Engpass	127
9.8.	Autonomie benötigt Grenzen und ein Projektgedächtnis	129
9.9.	Grenzen der Fallstudie und wissenschaftliche Neuheit	129
9.9.1.	Mögliche Verzerrungen	129
9.9.2.	Einordnung gegenüber verwandten Verfahren	130
9.10.	Protokoll für die Fortsetzung	130
10.	Nächste Schritte und Übergang nach drei Dimensionen	132
10.1.	Prioritäten in zwei Dimensionen	132
10.1.1.	Verbindliche Reihenfolge der Arbeitsarten	132
10.1.2.	A: Technische Weiterentwicklung	132
10.1.3.	B: Systematische Tests nach dem technischen Ausbau	134
10.1.4.	C: Demonstrationen als letzte Priorität	134
10.2.	Was ein dreidimensionaler CFK-Code zunächst bedeuten soll	135
10.2.1.	Geometrische Definition vor Portierung	135
10.2.2.	Leicht übertragbare algebraische Bestandteile	135
10.3.	Bitcodierung: der eigentliche geometrische Risikobereich	136
10.3.1.	Ein Pfadbit ist noch keine räumliche Koordinate	136
10.3.2.	Wurzelidentität, Wortbreite und exakte Arithmetik	136
10.3.3.	Flächennachbarn und konformer Abschluss	137

10.4. Hydrodynamik und Gravitation in 3D	138
10.4.1. Der Hydrooperator: bekannte Struktur, neue Geometrie	138
10.4.2. Das Gravitationsmodell ändert sich physikalisch	139
10.5. Grobe Aufwands- und Risikoabschätzung	139
10.6. Ein schrittweiser 3D-Entwicklungsweg	141
10.7. Eignung für kleinere astrophysikalische Forschungsfragen	142
10.7.1. Bedingtes Ja für klar definierte Modelle	142
10.7.2. Drei überschaubare Forschungsrichtungen	142
10.7.3. Wann die Antwort wissenschaftlich belastbar wird	143
10.8. Entscheidungskriterium für die erste 3D-Studie	144
11. Fazit und Einordnung	145
11.1. Antwort auf die Forschungsfrage	145
11.2. Was erreicht wurde	145
11.3. Was nicht abgeschlossen ist	146
11.4. Rollen und wissenschaftliche Verantwortung	146
11.5. Einordnung und Perspektive	146
A. Register der Ideen und Entscheidungen	147
A.1. Zuordnungsregeln	147
A.2. Nachprüfbare Gesprächsanker	147
A.3. Zuordnung ohne Scheingenauigkeit	148
A.4. Offene Ideen und unerledigte Aufträge	148
A.5. Noch fehlende Belege	149
B. Reproduzierbarkeit und Publikation	150
B.1. Erforderliche Artefakte	150
B.2. Code im Buch und Code zur Arbeit	150
B.3. Bearbeitbare Kapitel	150
B.4. Ein minimales Versuchsmanifest	150
B.5. Reproduktion in drei Stufen	151
B.6. Daten, Zwischenstände und Bilder	151
B.6.1. Bildnachweis der Titelseite	152
B.7. Freigabe für eine Veröffentlichung	152
C. Zentrale Algorithmen	153
C.1. Adresse und exakte Geometrie	153
C.2. Nachbar aus dem Bitpfad	154
C.3. Konformer Abschluss als Arbeitsliste	154
C.3.1. Parallele Konstruktion durch Vereinigung	155
C.4. Lineare Rekonstruktion mit Ecksternen	156

C.5. Flüsse, Zeitfortschritt und Rückweisung	156
C.6. Baumgravitation	157
C.7. Kick-Hydro-Kick	158
C.8. Konservative Übertragung zwischen Gittern	158

1. Fragestellung und Arbeitsweise

1.1. Eine dokumentierte Fallstudie

Wie weit lässt sich eine numerische Forschungsfrage heute im Dialog mit einem Sprachmodell bearbeiten? Untersucht wird diese Frage anhand einer konkreten Entwicklung: von einer Integer-codierten adaptiven Triangulation über gravitative Teilchensimulationen bis zu einem zweidimensionalen Finite-Volumen-Prototyp für selbstgravitierendes Gas.

Der Autor knüpft an seine Diplomarbeit von 2004 an, die nach seiner Erinnerung etwa ein Jahr beanspruchte. Dieser persönliche Vergleich motiviert die Untersuchung. Wie Vorwissen, veränderte Werkzeuge und unterschiedliche Ergebnisreife seine Aussage begrenzen, wird in Abschnitt 9.5 untersucht.

1.2. Was als Fortschritt zählt

Fortschritt wird an überprüfbaren Ergebnissen beurteilt: einer geometrischen Herleitung, einem geprüften Programm oder einer kontrollierten numerischen Studie. Kalenderdauer, Autorenaufwand und Rechenzeit werden getrennt betrachtet. Die Kriterien und verfügbaren Nachweise stehen in Kapitel 8 und 9.

1.3. Chronologischer Aufbau

Die Entwicklung begann mit Geometrie und Nachbarn aus Bitfolgen. Es folgten minimale konforme Teilchenbäume, statistische Gitterversuche, Parallelisierung, Baumgravitation und Bewegungsintegration. Danach wurden Rekonstruktion, Transport, Euler-Flüsse, adaptive Gitter und die Gravitationskopplung untersucht. Die Kapitel folgen diesen Etappen, ordnen jedoch mathematische Abhängigkeiten auch unabhängig von der Chronologie.

1.4. Zwei miteinander verbundene Untersuchungsziele

Das technische Ziel ist eine transparente Verbindung von adaptiver Geometrie, hydrodynamischem Transport und Selbstgravitation. Der Baum soll dabei nicht nur eine zusätzliche Suchstruktur sein: Seine Blätter bilden die Zellen, und ihre Integer-Adressen sollen geometrische und topologische Beziehungen zugänglich machen. Untersucht wird zunächst eine festgelegte zweidimensionale Hierarchie. Die spätere Übertragung auf drei Dimensionen ist ein Entwicklungsziel, keine Voraussetzung, die in dieser Arbeit bereits als erfüllt angenommen wird.

Das zweite Ziel betrifft die Arbeitsweise. Welche Beiträge kann ein Sprachmodell beim Wiederaufnehmen einer länger zurückliegenden fachlichen Arbeit leisten? Wo beschleunigt es die Umsetzung, wo verlagert es Aufwand in Kontrolle und Interpretation? Diese Fragen werden dokumentarisch anhand konkreter Entscheidungen behandelt, nicht durch einen Vergleich zufällig zugewiesener Versuchsgruppen. Der technische Gegenstand liefert dabei die überprüfbaren Artefakte, an denen sich die Prozessbeschreibung bewähren muss.

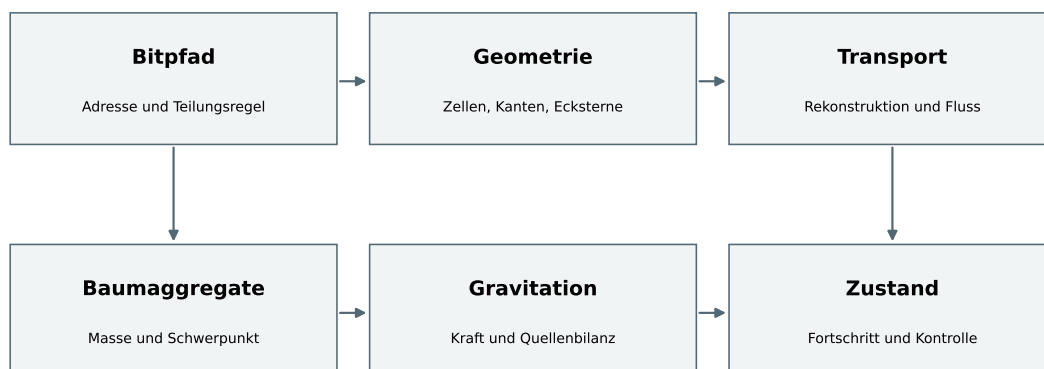


Abbildung 1.1.: Konzeptioneller Zusammenhang der Arbeitsgebiete. Die Bitgeometrie liefert sowohl das Transportgitter als auch die hierarchische Ordnung gravitierender Quellen. Die Pfeile zeigen Abhängigkeiten, keinen vollständigen zeitlichen Ablauf und keine bereits gelöste adaptive Hydro-Gravitations-Kopplung.

1.5. Abgrenzung des Gegenstands

Die Integer-codierte Triangulation wird im Folgenden als CFK-Baum bezeichnet. Die konkrete Wurzelgeometrie, Teilungsregel und Nummerierung werden in Kapitel 2 definiert; Aussagen über diese Konstruktion dürfen nicht ohne Prüfung auf andere Bäume übertragen werden. Insbesondere ist eine schnelle Adressoperation nicht automatisch ein Nachweis für einen schnellen vollständigen Simulationsschritt.

Die Teilchenrechnungen und die Gasrechnungen sind verschiedene Modelle. Die Gravitation der hier verwendeten ebenen Gasschicht wird über einen geglätteten räumlichen Wechselwirkungskern angenähert. Sie ist nicht mit der Gravitation eines zweidimensionalen logarithmischen Potentials oder einer bereits räumlich aufgelösten Gaskugel gleichzusetzen. Ideales Gas und vereinfachte Randbedingungen grenzen die physikalische Aussage weiter ein. Eine visuell erkennbare Kollision ist daher zunächst eine numerische Demonstration, nicht eine realistische Sternkollision.

1.6. Vorgehen und Kriterien

Der Entwicklungsweg lässt sich in vier wiederkehrende Schritte gliedern: eine mathematische oder physikalische Annahme benennen, einen möglichst kleinen ausführbaren Baustein herstellen, ihn gegen eine unabhängige Eigenschaft oder Referenz prüfen und erst danach in eine grössere Rechnung einbauen. Dieses Vorgehen wurde nicht in jeder Etappe bereits vollständig eingehalten. Gerade Abweichungen und nachträgliche Korrekturen gehören zur Fallstudie.

Dabei sind mathematische Eigenschaften, korrekte Implementierung, numerische Genauigkeit und physikalische Eignung getrennt zu prüfen. Abschnitt 8.1.1 präzisiert diese vier Ebenen und ordnet ihnen die durchgeführten Versuche zu.

1.7. Leseführung und Grenzen der Rekonstruktion

Kapitel 2 und 3 bilden den geometrischen Ausgangspunkt; Kapitel 4 behandelt Gravitation und Kapitel 5 die Implementierung. Kapitel 6 und 7 führen zu Hydrodynamik und gekoppelten Gasrechnungen. Für die Arbeitsweise sind Kapitel 9 und das Fazit in Kapitel 11 zentral. Der Ausblick steht in Kapitel 10; Anhang C verbindet Formeln und Implementierung.

Die Darstellung rekonstruiert den Entwicklungsweg aus Gespräch, Quellständen und Ergebnisdateien. Die Regeln dieser Zuordnung und verbleibende Lücken sind in Anhang A dokumentiert.

Herkunft und Beitrag: Die Forschungsfrage, die Wiederaufnahme der früheren Arbeiten und die Forderung nach transparenter Zuordnung stammen vom Autor. Die Gliederung und die hier vorgeschlagene Trennung der Evidenzstufen wurden von ChatGPT für diese Dokumentation ausgearbeitet.

2. Geometrie und Integer-codierter Baum

Dieses Kapitel entwickelt die diskrete Geometrie, auf der die späteren physikalischen Verfahren aufbauen. Drei Gegenstände sind zu unterscheiden: die unendliche Menge möglicher Zellen, ein endlicher gespeicherter Baum und das aus seinen Blättern gebildete Rechengitter. Die Integeradresse beschreibt den ersten Gegenstand; erst zusammen mit einer endlichen Teilungsmenge bestimmt sie die beiden anderen.

2.1. Literaturbezug und mathematischer Rahmen

Die Bezeichnung CFK steht für Coxeter–Freudenthal–Kuhn. Für unsere Konstruktion ist das Manuskript von Persiano, Comba und Barbalho [1] der unmittelbare Ausgangspunkt. Es beschreibt kompatible Simplicialzerlegungen und adaptive Bisektionsverfeinerung. Seine Bezeichnungen J_1 und S_1 werden hier für die regulären zweidimensionalen Anordnungen verwendet: Zwei vollständige Bisektionsschritte ergeben wieder eine feinere J_1 -Anordnung; die Zwischenstufe ist um 45° gedreht. In zwei Dimensionen sind alle entstehenden Dreiecke ähnlich. Das ist von der Unterscheidung mehrerer Tetraederformen in drei Dimensionen zu trennen.

Wir beschränken uns auf einen einzelnen Wurzelsimplex. Damit entfallen Übergänge zwischen mehreren Wurzeln; diese wären bei einem Wald zusätzlich zu definieren. Die führende Eins, Eckreihenfolge und Kindnummerierung sind explizite Konventionen unserer Implementierung, keine aus der Quelle übernommene universelle Codierung. Ein adaptives Blattgitter enthält verschiedene Tiefen und ist nicht selbst eine einzelne uniforme J_1 -Stufe.

Bitbasierte Simplex-Indizes sind auch ausserhalb dieses Projekts bekannt. Burstedde und Holke [2] konstruieren beispielsweise einen tetraedrischen Morton-Index für Rotverfeinerung. Dessen Verfeinerungsregel und Zielsetzung unterscheiden sich von unserer binären Bisektion mit streng konformem Abschluss. Die folgenden Sätze betreffen unsere feste Hierarchie; ihre Abgrenzung zu verwandten Verfahren wird in Abschnitt 9.9.2 eingeordnet.

Wir schreiben conv für die konvexe Hülle, $|T|$ für die Fläche und $\text{int } T$ für das Innere. Alle geometrischen Mengen sind zunächst geschlossen. Für die eindeutige Teilchenzuordnung auf gemeinsamen Rändern wird später eine zusätzliche Besitzregel eingeführt.

2.2. Eine festgelegte Hierarchie

Das Wurzeldreieck ist

$$T_1 = \text{conv}\{(0, 0), (2, 0), (0, 2)\}.$$

Seine Fläche ist 2. Das Einheitsquadrat ist darin enthalten, aber nicht das gesamte Rechengebiet. In jedem geordneten Dreieck (A, B, C) liegt der rechte Winkel an A ; die Orientierung ist gegen den Uhrzeigersinn. Mit $M = (B + C)/2$ sind die Kinder

$$T_{2k} = (M, A, B), \quad T_{2k+1} = (M, C, A). \quad (2.1)$$

Dies halbiert die Hypotenuse. Die Kinder bleiben rechtwinklig-gleichschenkelig und besitzen dieselbe Orientierungskonvention.

Satz 2.1 (Geometrische Zerlegung). *Die beiden Kinder überdecken ihren Elternsimplex, ihre Inneren sind disjunkt, und ihr Schnitt ist die Strecke AM . Beide Kindflächen sind gleich der halben Elternfläche.*

Beweis. Die Strecke vom Eckpunkt A zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite zerlegt ein konvexes Dreieck in $\text{conv}(A, B, M)$ und $\text{conv}(A, M, C)$. Beide besitzen dieselbe Höhe über BC und gleich lange Grundseiten BM und MC . Ihre Flächen sind deshalb gleich. Mit $u = B - A$, $v = C - A$, $u \cdot v = 0$ und $|u| = |v|$ gilt $(A - M) \cdot (B - M) = (-u - v) \cdot (u - v)/4 = 0$. Die beiden Vektoren haben gleiche Länge. Dies beweist die Form des ersten Kindes; für das zweite gilt dieselbe Rechnung. Die Determinanten der geordneten Kindkanten sind jeweils $\det(u, v)/2 > 0$. $\square$

Insbesondere entstehen durch wiederholte Bisektion keine beliebig spitzen Dreiecke: Die Winkel sind stets $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Die Familie ist formregular. Dieser geometrische Vorteil garantiert aber weder isotrope numerische Fehler noch eine bestimmte Ordnung eines auf dem Gitter ausgeführten Strömungsverfahrens.

2.3. Adressen und Geometrie

Die führende Eins kennzeichnet die Wurzel; alle weiteren Bits bestimmen den Pfad. Für $k = (1b_1 \dots b_d)_2$ gilt

$$d = \text{bitlength}(k) - 1, \quad \text{parent}(k) = k \gg 1, \quad \text{child}_b(k) = 2k + b.$$

Für $k > 1$ vertauscht XOR mit 1 die Geschwister. Ein Code a ist genau dann Vorfahr von k , wenn $d(a) \leq d(k)$ und $k \gg (d(k) - d(a)) = a$.

Satz 2.2 (Eindeutigkeit und Präfixrelation). *Die positiven Integer stehen in bijektiver Beziehung zu den endlichen Pfaden der Hierarchie. Für zwei Codes a, k gilt $T_k \subseteq T_a$ genau dann, wenn der Pfad von a ein Präfix des Pfades von k ist. Sind die Pfade nicht vergleichbar, so sind die Dreiecksinneren disjunkt.*

Beweis. Jeder positive Integer besitzt genau eine Binärdarstellung mit führender Eins. Das Abtrennen dieser Eins liefert eine endliche Folge aus Nullen und Einsen und umgekehrt. Eine Präfixverlängerung entspricht einer Folge von Kindbildungen, also Mengeninklusion. Bei nicht vergleichbaren Pfaden gibt es eine erste unterschiedliche Kindentscheidung. Satz 2.1 trennt dort die Inneren; weitere Verfeinerung erhält diese Trennung. Eine positive Fläche kann daher nicht in einem nicht vergleichbaren Dreieck enthalten sein. Ein echter Vorfahr besitzt grössere Fläche, sodass auch die umgekehrte Inklusion ausgeschlossen ist. $\square$

Ein Nachfahre von k mit zusätzlichen r Bits hat einen Code im Intervall

$$[2^r k, 2^r(k+1) - 1] \cap \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Diese Aussage bezieht sich auf eine feste Nachfahrentiefe. Numerisches Sortieren von Codes verschiedener Tiefen liefert nicht ohne zusätzliche Transformation eine räumliche Tiefensuchreihenfolge.

Auch der tiefste gemeinsame Vorfahr ist ohne Koordinaten bestimmbar: Zuerst wird der tiefere Code auf die Tiefe m des flacheren gekürzt. Sind die so erhaltenen Codes a', b' gleich, ist dieser Code das Ergebnis. Andernfalls sei $r = \text{bitlength}(a' \text{ XOR } b')$. Dann ist der gemeinsame Vorfahr $a' \gg r$ und hat Tiefe $m - r$. Der erste unterschiedliche Bitplatz begrenzt genau das gemeinsame Präfix. Diese Formel ist eine mathematische Folgerung; sie behauptet nicht, dass jeder Produktionspfad im bestehenden Code sie bereits verwendet.

Satz 2.3. *Auf Tiefe d gelten $|T_k| = 2^{1-d}$, Kathetenlänge $2^{1-d/2}$ und Hypotenusenlänge $2^{3/2-d/2}$.*

Beweis. Die Wurzel besitzt Fläche 2 und Kathetenlänge 2. Jeder Schritt halbiert die Fläche. Da die Form erhalten bleibt, werden alle Längen mit $1/\sqrt{2}$ multipliziert. Induktion liefert die Formeln. $\square$

Eckkoordinaten sind dyadisch rational: Rekonstruktion benötigt nur die Anwendung von (2.1) entlang des Pfades. Exakte rationale Referenzrechnung und beschleunigte Gleitkommaauswertung sind dennoch verschiedene Implementierungsverträge. Bei physikalischer Skalierung um $s > 0$ wachsen Längen mit s und Flächen mit s^2 .

2.3.1. Schwerpunkt, Normalen und exakte Arithmetik

Der Flächenschwerpunkt ist $x_k = (A + B + C)/3$. Obwohl die Ecken dyadisch rational sind, muss der Schwerpunkt es wegen des Faktors $1/3$ nicht sein. Der Schwerpunkt darf auch nicht mit dem Umkreismittelpunkt M verwechselt werden: Letzterer liegt auf der Hypotenuse und eignet sich nicht als allgemeiner innerer Zellstützpunkt.

Für eine in positiver Randorientierung durchlaufene Kante von P nach Q ist die äussere Einheitsnormale

$$n_e = \frac{(Q_y - P_y, -(Q_x - P_x))}{|Q - P|}.$$

Das Produkt $|e|n_e$ benötigt keine Quadratwurzel. Es erfüllt die geometrische Identität $\sum_e |e|n_e = 0$, da die gerichteten Kantenvektoren eines geschlossenen Dreiecks summiert null ergeben. Diese Identität ist für die Erhaltung konstanter Zustände in der Finite-Volumen-Methode wichtig.

Selbstähnlichkeit als Optimierungsansatz. Der schrittweise Pfaddurchlauf ist eine Referenzkonstruktion, keine untere Schranke für den Rechenaufwand. Die Selbstähnlichkeit legt nahe, Translation, Orientierung und Skalierung getrennt aus dem Bitpfad zu bestimmen. Auf einem gemeinsamen dyadischen Koordinatengitter lassen sich Ecken als Integerpaare darstellen. Rechtwinkligkeit und gleiche Katheten sind dann exakte algebraische Eigenschaften, sofern Überläufe ausgeschlossen sind; eine spätere Umrechnung in Gleitkommazahlen ist davon zu unterscheiden. Auch die rationale Referenz erhält diese Eigenschaften bereits exakt, lediglich mit höherem Verwaltungsaufwand.

Für zwei so dargestellte Zellschwerpunkte $x_i = u_i/(3 \cdot 2^m)$ und $x_j = u_j/(3 \cdot 2^m)$, $u_i, u_j \in \mathbb{Z}^2$, gilt exakt

$$|x_i - x_j|^2 = \frac{(u_{i,x} - u_{j,x})^2 + (u_{i,y} - u_{j,y})^2}{9 \cdot 2^{2m}}.$$

Dies setzt die Dekodierung der vollständigen Adressen und die Anpassung an einen gemeinsamen Massstab voraus. Die Länge des gemeinsamen Präfixes allein bestimmt

den Abstand nicht. Für massengewichtete Schwerpunkte zusammengefasster Gravitationsknoten kommt zusätzlich die aktuelle Massenverteilung hinzu; sie steht nicht im geometrischen Code. Ein entsprechender Decoder mit Bitoperationen in C++ wäre vor einer Assemblerfassung zu entwickeln und gegen die rationale Referenz zu prüfen. Ein Laufzeitvorteil, insbesondere im gesamten Gravitationslauf, ist anschliessend zu messen und hier noch nicht nachgewiesen.

Herkunft und Beitrag: Der Vorschlag, Selbstähnlichkeit und Bitcodierung für eine verkürzte Geometrie- und Abstandsberechnung auszunutzen, stammt vom Autor. Die hier formulierte Integerdarstellung präzisiert diese offene Aufgabe; sie beschreibt noch keine implementierte Optimierung.

Eine Referenzimplementierung kann die Eckrekonstruktion ausschliesslich mit rationalen Zahlen ausführen. Der Pfaddurchlauf hat d Schritte; die Operandengrösse wächst jedoch mit d . Eine affine Abbildung mit allgemeiner invertierbarer Matrix F erhält die Topologie und multipliziert Flächen mit $|\det F|$, zerstört im Allgemeinen aber die rechtwinklig-gleichschenklige Form und die einfachen Längenformeln.

2.4. Nachbarn: Adresse ist nicht Existenz

Die lokalen Kanten 0, 1, 2 bezeichnen BC, CA, AB . Die Funktion $\nu_e(k)$ liefert einen gleich tiefen Nachbarn im impliziten uniformen Gitter, oder das Randsymbol $\perp$. Sie benötigt keinen gespeicherten Baum. Der folgende Übergang ist die Grundlage des Aufstiegs:

Kindbit	lokale Kante	Beziehung
0	0	volle Elternkante 2
0	1	halbe Elternkante 0
0	2	Geschwisterkante 1
1	0	volle Elternkante 1
1	1	Geschwisterkante 2
1	2	halbe Elternkante 0

Beim Wiederabstieg wird die gegenüberliegende lokale Kante mitgeführt. Die Orientierung kehrt die Zuordnung der Kantenhälften um. Aufwand und Stapelgrösse sind $O(d)$, wenn eine Integeroperation als elementar gezählt wird. Für beliebig lange Integer ist dies keine konstante Bitkostenannahme. Die Prüfung, welcher Nachbar im adaptiven Blattgitter tatsächlich existiert, ist ein weiterer Schritt. Insbesondere ist numerische Nähe zweier Integerwerte kein geometrischer Abstand.

2.4.1. Vollständige Übergangsregel

Für einen nachvollziehbaren Algorithmus wird intern neben dem Nachbarcode auch dessen lokale gemeinsame Kante geführt. Definiere $N(k, e) = (n, f)$; am Rand ist $N(k, e) = \perp$. Die Geschwisterkanten sind $s(0) = 2$, $s(1) = 1$. Ist $k = 2p + b$ und $e = s(b)$, so gilt

$$N(k, e) = (k \text{ XOR } 1, s(1 - b)).$$

Bei einer anderen Kante wird zum Elternteil aufgestiegen. Es gibt genau zwei Fälle:

1. Ist $e = 0$, entspricht die Kindhypotenuse der vollen Elternkathete $2 - b$. Berechne $N(p, 2 - b) = (q, f)$. Dann ist $f \in \{1, 2\}$ und

$$N(k, 0) = (2q + \mathbf{1}_{f=1}, 0).$$

2. Die verbleibende äussere Kindkante ist die halbe Elternhypotenuse. Berechne $N(p, 0) = (q, 0)$. Wegen der entgegengesetzten Rantorientierung gilt

$$N(k, e) = (2q + 1 - b, 2 - b).$$

Ein Randresultat wird in beiden Fällen unverändert nach unten weitergereicht. Für $k = 1$ liegen sämtliche Kanten am Gebietsrand. Die Produktionsroutine in `geometry.py` realisiert diese Rekursion iterativ mit einem kleinen Stapel und gibt nur n zurück.

Satz 2.4 (Korrektheit der uniformen Nachbarsuche). *Die obige Rekursion liefert für jede innere Kante den eindeutig bestimmten Nachbarn gleicher Tiefe mit seiner gegenüberliegenden lokalen Kante. Insbesondere folgt aus $N(k, e) = (n, f)$ auch $N(n, f) = (k, e)$.*

Beweis. Induktion über die Tiefe. An der Wurzel gilt die Randaussage unmittelbar. Im Induktionsschritt ist eine Kindkante entweder die neue gemeinsame Strecke AM , eine vollständige Elternkathete oder eine Hälfte der Elternhypotenuse. Im ersten Fall liefert die Geschwisterregel das Ergebnis. Im zweiten Fall wird die auf der Gegenseite liegende Kathete durch genau das Kind mit Hypotenuse auf dieser Kante übernommen. Im dritten Fall werden die beiden Hypotenusenhälften wegen der entgegengesetzten Orientierung über Kreuz zugeordnet. Die Induktionsannahme liefert jeweils den korrekten Elternnachbarn. Damit sind alle Fälle erschöpft. Die Symmetrie folgt aus der Eindeutigkeit des Dreiecks auf der anderen Seite derselben Kante. $\square$

Dabei wird zugleich die Kompatibilität der uniformen Stufen sichtbar: Innere gleich tiefe Hypotenusen liegen Hypotenusen gegenüber; innere Katheten liegen Katheten gegenüber. Beim nächsten vollständigen Bisektionsschritt werden die Hypotenusen beidseitig halbiert, die Katheten bleiben als ganze Kindhypotenusen erhalten. Neue Innenkanten sind gemeinsame Kindkatheten. Aus der trivial konformen Wurzel folgt damit induktiv die Konformität jeder uniformen Stufe.

2.4.2. Ein kleines Beispiel

Die Kinder der Wurzel haben Codes 2 und 3. Auf der nächsten Ebene gilt

$$T_4 = ((1, 0), (1, 1), (0, 0)), \quad T_7 = ((0, 1), (0, 0), (1, 1)).$$

Ihre gemeinsame Hypotenuse verbindet $(0, 0)$ und $(1, 1)$, also $\nu_0(4) = 7$ und $\nu_0(7) = 4$. Dagegen ist $\nu_1(4) = \perp$, und $\nu_2(4) = 5$ ist der Geschwisternachbar. Dieses Beispiel verdeutlicht, weshalb XOR mit 1 nur für die Geschwisterkante die Nachbaroperation ist.

2.5. Teilungsmenge und Konformitätsabschluss

Sei I die Menge geteilter Knoten. Für einen vollständigen binären Baum sind

$$N = \{1\} \cup \{2k, 2k + 1 : k \in I\}, \quad L = N \setminus I, \quad |L| = |I| + 1.$$

Vorfahren geteilter Knoten müssen ebenfalls geteilt sein. In dieser festen kompatiblen Hierarchie wird zusätzlich der gegenüberliegende Hypotenusenpartner geteilt, sofern er im Gebiet existiert. Die Arbeitsliste schliesst die Anforderungen S unter beiden Regeln ab:

```

I = empty set; work = initial split requirements S
while work not empty:
    k = pop(work)
    if k in I: continue
    insert k into I
    if k != 1: push(parent(k))
    if neighbor(k, 0) exists: push(neighbor(k, 0))
return I

```

Die folgenden Sätze begründen die geometrische Konformität, Terminierung und Minimalität dieses Verfahrens. Die Vereinigungseigenschaft (2.5) wird anschliessend zur Grundlage des parallelen Aufbaus in Kapitel 5.

2.5.1. Konformität als geometrische Eigenschaft

Eine endliche Dreiecksfamilie heisst hier konform, wenn sie T_1 überdeckt, ihre Inneren disjunkt sind und der Schnitt zweier verschiedener Dreiecke entweder leer, eine gemeinsame Ecke oder eine vollständige Kante beider Dreiecke ist. Ein vollständiger endlicher Binärbaum erfüllt die ersten beiden Eigenschaften bereits durch Satz 2.1. Die dritte

Eigenschaft ist eine zusätzliche Bedingung; blosse Baumvollständigkeit verhindert keine hängenden Knoten.

Satz 2.5 (Charakterisierung konformer Teilungsmengen). *Sei I endlich und unter echter Vorfahrenbildung abgeschlossen. Das Blattgitter ist genau dann konform, wenn*

$$k \in I, \quad \nu_0(k) \neq \perp \implies \nu_0(k) \in I. \quad (2.3)$$

Beweis. Eine Teilung erzeugt als einzigen neuen Punkt auf dem Rand des geteilten Dreiecks den Mittelpunkt seiner Hypotenuse. Liegt diese im Inneren des Wurzelgebiets, muss derselbe Punkt auch auf der Gegenseite als Gitterecke erzeugt werden. In der festen uniform kompatiblen Hierarchie wird er dort durch Teilung des gleich tiefen Hypotenusenpartners erzeugt. Ein gröberer gegenüberliegender Vorfahr kann ihn nicht bereits als Ecke besitzen: Er liegt im relativen Inneren dieser Kante, die an der betrachteten uniformen Stufe noch ungeteilt ist. Weitere Nachfahren auf der Gegenseite setzen die Teilung dieses Partners voraus. Das zeigt die Notwendigkeit.

Für die Umkehrung ordnet man I nach wachsender Tiefe. Vor der Verarbeitung einer Tiefe existieren alle dort zu teilenden Dreiecke als Blätter, weil ihre Vorfahren bereits geteilt sind. Innere Hypotenusenpartner werden gemeinsam geteilt; Randhypotenusen benötigen keinen Partner. Diese Operation fügt auf inneren Kanten denselben Punkt beidseitig ein und erzeugt nur gemeinsame neue Innenkanten. Induktiv bleibt die Konformität erhalten, bis alle Teilungen ausgeführt sind. $\square$

Neben $|L| = |I| + 1$ gelten $|N| = 2|L| - 1$ und

$$\sum_{k \in L} 2^{1-d(k)} = 2. \quad (2.4)$$

Die Anzahlen folgen aus der Tatsache, dass jede Teilung ein Blatt durch zwei ersetzt; die Flächenidentität folgt aus Flächenadditivität. Keine dieser skalaren Identitäten ersetzt die Kantenprüfung: Auch ein nichtkonformer vollständiger Baum erfüllt sie.

2.5.2. Minimalität, Terminierung und Vereinigung

In Binärdarstellung wird das Anhängen des Kindbits unmittelbar sichtbar:

$$\begin{aligned} 4 &= (100)_2 \longrightarrow 8 = (1000)_2, \quad 9 = (1001)_2, \\ 7 &= (111)_2 \longrightarrow 14 = (1110)_2, \quad 15 = (1111)_2. \end{aligned}$$

Die führende Eins markiert die Wurzel; die folgenden Bits sind die aufeinanderfolgenden Kindentscheidungen, keine kartesischen Koordinaten. Schreibe $\mathcal{C}(S)$ für den Abschluss

2. Geometrie und Integer-codierter Baum

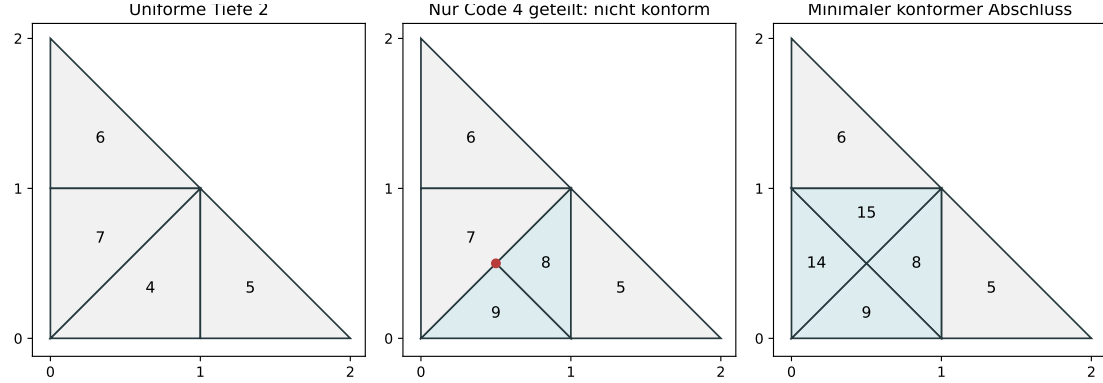


Abbildung 2.1.: Konformität ist mehr als Baumvollständigkeit. Links liegen vier Blätter gleicher Tiefe vor. Die alleinige Teilung von Code 4 erzeugt den rot markierten hängenden Mittelpunkt auf der Kante zu Code 7 (Mitte). Der Abschluss teilt zusätzlich Code 7; rechts sind alle inneren Kanten wieder vollständige Kanten beider anliegenden Blätter. Eigene Darstellung aus den exakten Eckkoordinaten der Referenzimplementierung.

von S unter Elternbildung und (2.3). Für $S = \emptyset$ ist $\mathcal{C}(S) = \emptyset$. Für nichtleeres endliches S mit maximaler Tiefe D verbleibt die Arbeitsliste in den höchstens $2^{D+1} - 1$ Codes bis Tiefe D . Diese grobe Schranke beweist Terminierung, ist aber keine praktische Laufzeitprognose für adaptive Gitter.

Satz 2.6 (Kleinster konformer Abschluss). $\mathcal{C}(S)$ ist die eindeutig kleinste konforme Teilungsmenge, die S enthält. Der Operator ist extensiv, monoton und idempotent:

$$S \subseteq \mathcal{C}(S), \quad S \subseteq R \Rightarrow \mathcal{C}(S) \subseteq \mathcal{C}(R), \quad \mathcal{C}(\mathcal{C}(S)) = \mathcal{C}(S).$$

Beweis. Jede Einfügung der Arbeitsliste ist entweder eine Ausgangsanforderung oder eine zwingende Folge einer bereits eingefügten Anforderung. Induktiv enthält jede zulässige Obermenge alle diese Einfügungen. Nach Terminierung ist die Ergebnismenge selbst abgeschlossen, also zulässig. Sie ist damit in jeder zulässigen Menge enthalten. Eindeutigkeit und die drei Operatoridentitäten folgen unmittelbar. $\square$

Für endlich viele Anforderungsmengen gilt sogar

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_i S_i\right) = \bigcup_i \mathcal{C}(S_i). \quad (2.5)$$

Zum Beweis genügt, dass jedes Element der rechten Seite in wenigstens einer abgeschlossenen Menge liegt. Alle aus ihm allein erzwungenen Elemente liegen bereits dort. Die rechte

Seite ist daher abgeschlossen; Minimalität und Monotonie liefern beide Inklusionen. Diese Eigenschaft würde für Regeln mit mehreren gemeinsam notwendigen Voraussetzungen nicht automatisch gelten.

Praktisch dürfen Arbeiter ihre *globalen* Anforderungen abschliessen und die Teilungsmengen anschliessend vereinigen. Lokal abgeschnittene Gebietsbäume erfüllen diese Voraussetzung nicht ohne zusätzliche Schnittstellenregeln. Auch müssen Anforderungen, die erst durch das Zusammenführen von Teilchen aus verschiedenen Gruppen entstehen, vorab berücksichtigt werden. Gleichung (2.5) sagt nichts darüber aus, ob ein konkreter Parallelalgorithmus diese vollständig ermittelt oder ob Kommunikation den Laufzeitgewinn aufzehrt.

2.5.3. Vergrößerung

Ein Elternknoten kann nur dann zu einem Blatt werden, wenn beide Kinder Blätter sind. Bei einer inneren Hypotenuse muss der ebenfalls teilbare Hypotenusenpartner gleichzeitig vergrößert werden; andernfalls bliebe der Mittelpunkt auf nur einer Seite bestehen. Die Routine `coarsen_many` akzeptiert nur angeforderte, gemeinsam geeignete Paare und erzwingt keine zusätzlichen Nachbarvergrößerungen. Deshalb ist sie keine globale Optimierung nach einem physikalischen Fehlerindikator.

2.6. Teilchenpfade

Für $p = (1 - b - c)A + bB + cC$ wird bei $b \geq c$ Kind 0 gewählt, sonst Kind 1. Die Kindkoordinaten lauten

$$(b', c') = \begin{cases} (1 - b - c, b - c), & b \geq c, \\ (c - b, 1 - b - c), & b < c. \end{cases}$$

Die Gleichheitsregel macht die Zuordnung auf Trennkanten eindeutig. Für $b = B/D, c = C/D$ bleibt der Nenner konstant; nur Zähler werden addiert, subtrahiert und verglichen. Notwendig sind alle Präfixteilungen, unter denen mindestens zwei Punkte liegen. Ihr Konformitätsabschluss ergibt den minimalen Baum innerhalb dieser Hierarchie. Identische Punkte sind nicht durch endliche Verfeinerung trennbar.

2.6.1. Herleitung des Koordinatenwechsels

Die baryzentrischen Koordinaten des ersten Kindes (M, A, B) erfüllen

$$p = (1 - b' - c')M + b'A + c'B.$$

Nach Einsetzen von $M = (B + C)/2$ und Koeffizientenvergleich folgt $b' = 1 - b - c$, $c' = b - c$. Nichtnegativität von c' entspricht $b \geq c$. Für das zweite Kind (M, C, A) ergibt dieselbe Rechnung $b' = c - b$, $c' = 1 - b - c$. Die fehlende Koordinate am neuen rechten Winkel ist $2c$ beziehungsweise $2b$. Alle drei Koordinaten bleiben bei einem Punkt im gewählten Kind nichtnegativ und summieren sich zu eins.

Damit lautet die exakte Integeriteration

$$(B, C, D) \mapsto \begin{cases} (D - B - C, B - C, D), & B \geq C, \\ (C - B, D - B - C, D), & B < C. \end{cases} \quad (2.6)$$

Der Nenner wächst nicht mit der Pfadtiefe. Für rationale Wurzelkoordinaten $x = u/r$, $y = v/s$, $q = \text{kgV}(r, s)$ kann man $D = 2q$, $B = u(q/r)$, $C = v(q/s)$ wählen. Da die Wurzelkatheten Länge 2 haben, sind $b = x/2$ und $c = y/2$.

Binäre Gleitkommaeingaben lassen sich als rationale Zahlen exakt interpretieren. Exaktheit bedeutet dann Exaktheit bezüglich des gespeicherten Wertes, nicht bezüglich einer ursprünglich gedachten Dezimalzahl. Bereits gerundete identische Eingaben werden durch eine anschließende exakte Rechnung nicht wieder unterscheidbar.

2.6.2. Minimaler Baum für eine Punktmenge

Sei P eine endliche Menge paarweise verschiedener Punkte im Wurzelgebiet. Für jeden Code k sei P_k die Teilmenge, deren durch die Besitzregel definierter Pfad das Präfix k besitzt. Definiere

$$S(P) = \{k : |P_k| \geq 2\}.$$

Satz 2.7 (Minimalität unter der Belegungsbedingung). *$S(P)$ ist endlich. Der Baum zur Teilungsmenge $\mathcal{C}(S(P))$ ist der eindeutig kleinste konforme Baum dieser Hierarchie mit höchstens einem zugeordneten Punkt pro Blatt.*

Beweis. Für wenigstens zwei verschiedene Punkte besitzt die endliche Menge positiven Mindestabstand δ . Der Durchmesser eines Dreiecks der Tiefe d ist $h_d = 2^{3/2-d/2}$ und geht gegen null. Sobald $h_d < \delta$, kann keine Zelle dieser Tiefe zwei Punkte enthalten. Also existieren nur endlich viele mehrfach belegte Präfixe. Für null oder einen Punkt ist $S(P)$ leer.

Jeder zulässige Baum muss sämtliche mehrfach belegten Präfixe teilen: Solange ein solches Präfix nicht geteilt ist, bleiben seine Punkte in derselben aktiven Zelle oder in einem gemeinsamen noch größeren Vorfahren. Umgekehrt trennt die Teilung aller Elemente von $S(P)$ alle Punkte; zusätzliche Verfeinerung kann die Blattbelegung nur verringern. Satz 2.6 liefert den kleinsten konformen Abschluss. $\square$

Diese Minimalität gilt bezüglich Verfeinerung in der festen Hierarchie. Sie ist keine Minimierung über sämtliche Triangulierungen derselben Punktmenge. Die Teilchen werden insbesondere nicht zu Gitterecken eines Delaunay-Netzes gemacht.

Der koordinatenbasierte Aufbau umgeht nicht die logische Prüfung auf Mehrfachbelegung. Er organisiert sie als Präfixpartitionierung:

```

work = [(1, all particles in root coordinates)]
S = empty set
while work not empty:
    k, group = pop(work)
    if size(group) <= 1: continue
    insert k into S
    partition group by B >= C
    transform each point using the integer coordinate rule
    push nonempty child groups with codes 2*k and 2*k+1
return closure(S)

```

Bei vorgeschriebener Maximaltiefe und verbleibender Mehrfachbelegung muss die Implementierung einen Fehler melden. Eine Aussage über Aufwand allein in Abhängigkeit von $n = |P|$ benötigt zusätzliche Annahmen über Abstände oder Verteilung; zwei sehr nahe Punkte können bereits tiefe Pfade erzwingen.

2.7. Das aktive Blattgitter als numerische Schnittstelle

2.7.1. Tiefenunterschiede an gemeinsamen Kanten

Satz 2.8 (Lokale Tiefenbalance). *Teilen zwei Blätter eines konformen Gitters dieser Hierarchie eine ganze Kante, so unterscheiden sich ihre Tiefen höchstens um eins.*

Beweis. Jede Kante auf Tiefe d hat Länge $2^{1-d/2+\eta/2}$ mit $\eta = 0$ für eine Kathete und $\eta = 1$ für eine Hypotenuse. Gleichheit der gemeinsamen Kantenlängen auf Tiefen d, d' impliziert $d' - d = \eta' - \eta \in \{-1, 0, 1\}$. $\square$

Dies ist eine Folgerung aus Formähnlichkeit und strenger Konformität, keine separat durchgesetzte allgemeine AMR-Balance-Regel. Es gilt für Kantennachbarn, nicht als Aussage über beliebige räumlich nahe Zellen.

2.7.2. Vom uniformen zum aktiven Nachbarn

Sei k ein aktives Blatt und $n = \nu_e(k)$. Ist $n = \perp$, liegt ein physischer Rand vor. Andernfalls prüft die Routine `ReconstructionMesh.neighbor_leaf` zunächst n selbst, dann dessen Elterncode und schliesslich die beiden Kinder von n auf Blattzugehörigkeit. Für ein Kind wird zusätzlich geprüft, ob seine Hypotenuse zur fraglichen Zelle zurückführt. Satz 2.8 begrenzt die Kandidaten auf genau diese Tiefen. Die geometrische Herleitung erklärt die kurze Suche; ohne Konformitätsvoraussetzung wäre sie nicht vollständig.

Bei einem feinen Nachbarn entspricht dessen Hypotenuse einer ganzen Kathete von k . Bei einem groben Nachbarn ist die gemeinsame Kante eine Kathete des Nachbarn und die Hypotenuse von k . Am gleichen Niveau liegen gleichartige Kanten gegenüber. Ein fehlender Kandidat wird als Topologiefehler behandelt und nicht durch eine toleranzabhängige Nächstnachsuche ersetzt.

2.7.3. Ecksterne ohne Koordinatensuche

Der Eckstern einer Gitterecke v ist die Menge aller Blätter, die v enthalten. Seine kombinatorische Traversierung beginnt mit einem Paar (k, i) aus Blattcode und lokaler Ecknummer. Über die beiden an dieser Ecke anliegenden Kanten wird zum jeweiligen Blattnachbarn übergegangen. Die Endpunktfolge der gemeinsamen Kante ist dort wegen der positiven Orientierung umgekehrt. Dies überträgt die lokale Ecknummer ohne Koordinatenvergleich. Bereits besuchte Paare verhindern Mehrfacharbeit; Randkanten beenden den jeweiligen Weg.

Im konformen Gitter des einfach zusammenhängenden Wurzelgebiets bilden die anliegenden Zellen einen zusammenhängenden Fächer, im Inneren einen geschlossenen Umlauf. Jede Zelle des Fächers ist deshalb über solche Kantenschritte erreichbar. Da jeder Dreieckswinkel mindestens $\pi/4$ beträgt, können an einer inneren Ecke höchstens acht Zellen anliegen. Die Anzahl der Sternzellen ist damit beschränkt, während jede Nachbarabfrage weiterhin Pfadoperationen benötigt.

Ecksterne sind für Rekonstruktionsstencils nützlich. Über eine einzelne Ecke wird jedoch kein zusätzlicher Finite-Volumen-Fluss integriert: Sie besitzt im zweidimensionalen Randintegral das Mass null. Nach einem Gitterwechsel müssen die gecachten Nachbarschaften und Sterne erneuert werden.

2.7.4. Konservative Restriktion und stabile Identitäten

Seien U_j Zellmittelwerte auf Nachfahren eines groben Blatts k . Die konservative Restriktion lautet

$$U_k = \frac{1}{|T_k|} \sum_{j \text{ unter } k} |T_j| U_j.$$

Die Zuordnung erfolgt durch Präfixprüfung. Für vier gleich tiefe Einzelzellen sind die Flächen gleich und die Restriktion ist deren arithmetischer Mittelwert. Dies begründet auch den Vergleich zweier Auflösungen ohne geometrische Überlappungssuche. Es liefert aber keine eindeutige Prolongation: Dafür ist eine zusätzliche Rekonstruktion nötig.

Der Integer bleibt der geometrische Schlüssel. Ein Index in einem kompakten Zustandsarray ist nur für den jeweiligen Gitter-Snapshot gültig. Physikalische Felder sind deshalb nicht Teil der Adressdefinition; sie werden über eine geprüfte Code-Index-Zuordnung mit dem Gitter verbunden.

2.8. Komplexität, Grenzen und Verifikation

2.8.1. Kostenmodell

Eltern- und Kindbildung benötigen bei fester Maschinenwortbreite konstante Zeit. Die Nachbarsuche führt im ungünstigsten Fall $O(d)$ Auf- und Abstiegsschritte aus. Die Geometrieauswertung hat ebenfalls $O(d)$ Rekursionsschritte. Für m neu abgeschlossene Anforderungen liefert eine Hashmengen-Implementierung unter üblichen Annahmen erwartete Kosten von $O(mD)$ für die Nachbartraversierungen bei Maximaltiefe D , zusätzlich zur Verwaltung und etwaigen Sortierung der Codes. Das ist keine Worst-Case-Garantie für Hashzugriffe.

Für unbeschränkte Integer sind Bitoperationen nicht generell konstant teuer. Bei einem Code aus w Bits können Verschiebungen und Kopien Arbeit proportional zur Wortzahl verursachen. Ein unsigned Integer mit w verfügbaren Bits kann wegen der führenden Eins nur Tiefen bis $w - 1$ darstellen. Mehrere Maschinenwörter erweitern die Grenze, beseitigen aber weder Überlaufprüfungen noch die Kosten von Überträgen. Ebenso bedeutet eine noch exakt darstellbare Adresse nicht, dass sehr kleine Koordinatenunterschiede in einem globalen Gleitkommasystem auflösbar sind.

Die Länge eines gemeinsamen Präfixes liefert für sich allein kein exaktes räumliches Öffnungskriterium für die Baumgravitation. Zellen verschiedener früher Teilbäume können eine Kante gemeinsam haben. Für räumliche Abstände sind weitere geometrische Schranken oder Koordinaten nötig; die Codierung stellt dafür Struktur und Grössenskalen bereit.

2.8.2. Unabhängige Prüfungen

Die mathematischen Argumente werden durch Tests ergänzt, nicht ersetzt. Die Geometrietests rekonstruieren rationale Eckkoordinaten und vergleichen die Integer-Nachbarsuche mit einer unabhängig aufgebauten Kantenbesitzerliste. Geprüft werden dabei sämtliche uniformen Stufen von Tiefe 0 bis 9, Orientierung, Flächen, rechte Winkel, Seitenlängen und Randkanten. Ein gesonderter Fall benutzt einen 1501-Bit-Code auf Tiefe 1500. Der Test alternierender Diagonalrichtungen prüft die geraden Stufen 2, 4, 6 und 8 als endliche Kontrolle der J_1 -Anordnung.

Die Baumtests behandeln fehlende Vorfahren, unvollständige Geschwister, Konformitätsabschluss und Verfeinerung. Adaptive Nachbarn und Ecksterne werden zusätzlich gegen geometrische Referenzen geprüft. Solche Tests sichern die Implementierung an vielen konkreten Fällen; sie beweisen weder beliebige zukünftige Codeänderungen noch die Korrektheit eines später aufgesetzten Hydro-Solvers.

Massgeblich sind drei Module im Verzeichnis CFK/2D:

- `geometry.py` für die implizite Geometrie,
- `tree.py` für den konformen Baum,
- `reconstruction.py` für das aktive Blattgitter.

Die Beweisstruktur ist absichtlich unabhängig von Python: Eine C++-Implementierung muss dieselben Invarianten erfüllen, auch wenn Speicherlayout und Integerdarstellung anders gewählt werden.

Herkunft und Beitrag: Wurzelcode 1, das halbe Quadrat als Wurzel, Geometrie aus Integern und die Nutzung desselben Baums für weitere Physik wurden vom Autor ausdrücklich vorgeschlagen. Konkrete Übergangsregeln, Implementierungen und Beweisformulierungen wurden im Dialog ausgearbeitet.

3. Statistische Gitterversuche

Grundlage sind die Versuchsreihen U1, G1, G2 und G3 vom 16. und 17. September 2026.

3.1. Fragestellung und Messgrössen

Die geometrischen Aussagen des vorangehenden Kapitels beschreiben, welches Gitter ein Code bezeichnet und wie Konformität hergestellt wird. Sie beantworten noch nicht, wie gross der resultierende Baum für eine räumliche Punktverteilung wird. Drei Fragen sind zu unterscheiden: Wie wächst die Blattzahl mit der Punktzahl? Wie verändert Konzentration die benötigte Tiefe? Wie empfindlich reagiert die Hierarchie auf die Lage derselben Punktwolke?

Die Versuche betreffen zunächst die *Gitterkonstruktion*, nicht die Genauigkeit eines hydrodynamischen oder gravitativen Löfers. Das Wurzeldreieck hat die Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$; die Punkte liegen im Einheitsquadrat. Das gesamte Wurzeldreieck bleibt trianguliert. Verfeinert wird bis zur eindeutigen Punkttrennung, ergänzt durch den minimalen Konformitätsabschluss. Leere Zellen gehören daher zum untersuchten Gitter und sind nicht automatisch vermeidbarer Aufwand.

3.1.1. Struktur und Auflösung

Seien n die Punktzahl, L die Blattzahl und N die Anzahl sämtlicher Knoten. Mit S bezeichnen wir die inneren Knoten des allein zur Punkttrennung erforderlichen Präfixbaums, mit E die zusätzlichen Teilungen seines Konformitätsabschlusses. Für den vollständigen binären Baum gelten

$$N = 2L - 1, \quad L - 1 = S + E. \quad (3.1)$$

Die Grössen L/n , E/S und $E/(L - 1)$ messen Speicheraufwand pro Punkt, Konformitätsaufwand relativ zur Punkttrennung und dessen Anteil an allen Teilungen. E/S setzt $S > 0$ voraus. Insbesondere ist $L - n$ nicht gleich E : Schon die reine Punkttrennung erzeugt leere Geschwister. Bei erfolgreicher eindeutiger Trennung sind genau n Blätter besetzt.

Für jede Blattklasse C wird das Tiefenhistogramm

$$h_C(d) = \frac{\#\{k \in C : d(k) = d\}}{|C|}$$

gebildet. Mittelwerte über alle, besetzte und leere Blätter beantworten verschiedene Fragen. Das besetzte Histogramm beschreibt die Auflösung an den Punkten; das allgemeine Histogramm berücksichtigt zusätzlich die Umgebung. Die Maximaltiefe erfasst seltene nahe Punktpaare und kann nicht durch die mittlere Tiefe ersetzt werden.

3.1.2. Replikation und Kontrolle

Unabhängige Wiederholungen sind neu erzeugte Punktwolken. Verschiebt man dieselbe Wolke an mehrere Zentren, entstehen abhängige Messungen, keine zusätzlichen unabhängigen Wiederholungen. Die Paarung bewahrt die zufällige Feinstruktur und erlaubt einen gezielteren Lagevergleich. Alle Produktionsbäume erhielten kostengünstige Invariantenprüfungen; vollständige Konformitäts- und Eindeutigkeitsprüfungen erfolgten nur an vorab ausgewählten kleineren Kontrollbäumen. Dies ist keine unabhängige Vollvalidierung sämtlicher grosser Produktionsbäume.

3.2. U1: Gleichverteilung als Ausgangspunkt

Die Uniformserie verwendet je 25 Wiederholungen pro Punktzahl. Tabelle 3.1 gibt die archivierten Struktur- und Zeitmessungen wieder. Die Laufzeiten gehören zum damaligen Implementierungsstand, nicht zum späteren C++-Hydrocode. Für $n = 10^5$ beträgt

Tabelle 3.1.: U1: Zeitmittel mit Stichprobenstandardabweichung und Strukturgrößen. Die Tiefenspanne umfasst die beobachteten Maximaltiefen.

n	Aufbauzeit [s]	mittlere Blattzahl	Tiefenspanne
10	$0,001028 \pm 0,000289$	33,32	6–11
100	$0,008267 \pm 0,000683$	364,92	12–19
1000	$0,111419 \pm 0,017639$	3443,68	18–24
10000	$1,334166 \pm 0,077415$	33352,36	25–32
100000	$18,063919 \pm 0,262672$	331324,24	32–38

$\bar{L}/n \simeq 3,313$. Die Blattzahl wächst im untersuchten Bereich annähernd proportional zu n , während der Zeitaufwand stärker zunimmt. Dies beweist weder einen universellen Grenzwert noch eine asymptotische Laufzeitklasse. Spätere grosse Skalierungsdiagnosen

mit drei Wiederholungen bleiben getrennte Serien; sie dürfen nicht als Fortsetzung desselben Stichprobenumfangs erscheinen.

3.3. G1: Konzentration um ein festes Zentrum

3.3.1. Verteilung und Versuchsplan

G1 verwendet isotrope Normalverteilungen mit $\mu = (1/2, 1/2)$ und den Breiten 0,025; 0,05; 0,1; 0,2 und 0,4. Ziehungen ausserhalb $Q = [0, 1]^2$ werden verworfen. Tatsächlich gilt also die konditionierte Dichte

$$f_Q(x) = \frac{\exp(-|x - \mu|^2/(2\sigma^2))}{2\pi\sigma^2 Z_\sigma} \mathbf{1}_Q(x), \quad Z_\sigma = \left[2\Phi\left(\frac{1}{2\sigma}\right) - 1 \right]^2. \quad (3.2)$$

Hier bezeichnet Φ die Standardnormalverteilungsfunktion. Für $a = 1/(2\sigma)$ und die zugehörige Dichte φ ergibt Integration

$$\text{Var}(X_1 \mid X \in Q) = \sigma^2 \left(1 - \frac{2a\varphi(a)}{2\Phi(a) - 1} \right).$$

Bei $\sigma = 0,4$ werden etwa 37,77% der Ziehungen verworfen; die gemessene Koordinatenstreuung beträgt 0,25949 statt 0,4. Die nominale Breite darf deshalb nicht mit der tatsächlichen Standardabweichung verwechselt werden.

Für $n = 10, 10^2, \dots, 10^6$ gibt es jeweils 25 Wiederholungen bei $\sigma = 0,1$ und zehn bei jeder anderen Breite, insgesamt 390 Bäume. Alle wurden erfolgreich aufgebaut. Fünfzehn vorab ausgewählte kleine Bäume erhielten vollständige Kontrollprüfungen. Die Zufallsstartwerte werden aus Master-Seed 20260917, Grössenstufe, Breitenkennung und Wiederholungsindex deterministisch abgeleitet.

3.3.2. Blattzahl und Konformitätsaufwand

Bei $n = 10^6$ liegen die mittleren Blattzahlen pro Punkt für alle Breiten zwischen 3,295 und 3,298, die Verhältnisse E/S zwischen 1,284 und 1,286. Zusätzliche Konformitätsteilungen sind somit zahlreicher als reine Punkttrennungen. $E/S \simeq 1,285$ entspricht einem Anteil $E/(S + E) \simeq 0,562$ an sämtlichen Teilungen. Bei zehn Punkten variiert L/n dagegen ungefähr zwischen 3,95 und 11,78: Der Weg von der festen Wurzel zur kompakten Wolke fällt bei kleinen Stichproben stärker ins Gewicht.

3. Statistische Gitterversuche

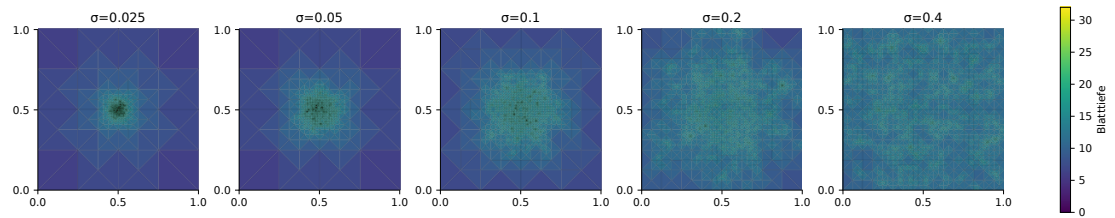


Abbildung 3.1.: G1: archivierte Gitterbeispiele. Konzentration erzeugt lokal tiefe Verfeinerung; die leere Umgebung bleibt konform trianguliert. Zu vergleichen sind die räumliche Ausdehnung und die Abstufung der Zellgrößen, nicht allein die Anzahl sichtbarer Kanten.

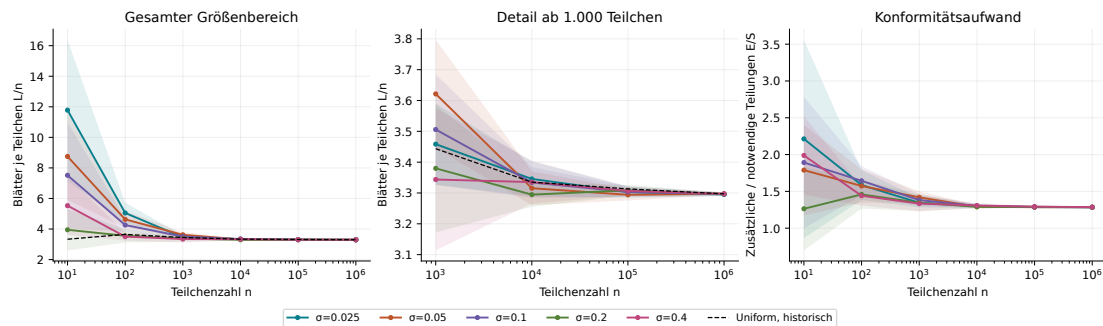


Abbildung 3.2.: G1: Strukturkennzahlen. Nahezu zusammenfallende Kurven bei grossen n gelten für den untersuchten Breitenbereich, nicht für beliebige Punktverteilungen. Streubänder zeigen Standardabweichungen, keine Konfidenzintervalle.

3.3.3. Eine lokale Erklärung der Tiefenverschiebung

Für lokal annähernd konstante Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ ist die erwartete Besetzung eines Blatts auf Tiefe d ungefähr $nf(x)2^{1-d}$. Eine Besetzung von Grössenordnung eins legt nahe

$$d_{\text{typ}}(x) \approx 1 + \log_2 n + \log_2 f(x). \quad (3.3)$$

Im Kern einer zweidimensionalen Gaussverteilung skaliert f wie σ^{-2} , also $d_{\text{typ}} \approx \log_2 n - 2 \log_2 \sigma + C$. Eine Halbierung der Breite sollte ungefähr zwei zusätzliche Ebenen erfordern. Gemessen werden bei $n = 10^6$ mittlere besetzte Tiefen 25,458, 27,458 und 29,459 für $\sigma = 0,1, 0,05$ und $0,025$. Diese Übereinstimmung stützt die Interpretation, ist aber kein Satz über Maximaltiefen oder den Konformitätsabschluss. Seltene Punktpaare, diskrete Orientierung und Randkonditionierung bleiben ausserhalb der Näherung. Leere Blätter sind ebenfalls nicht grundsätzlich grob: Konformität kann feine leere Nachbarzellen erzwingen.

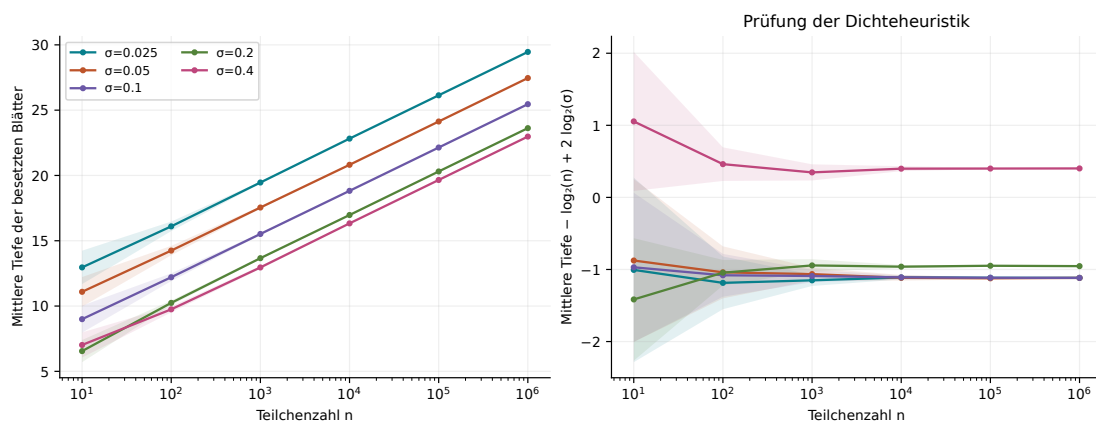


Abbildung 3.3.: G1: Tiefenentwicklung. Fast unveränderte Blattzahlen bedeuten nicht unveränderte räumliche Auflösung. Schmalere Wolken benötigen höhere Tiefen an den Punkten.

3.4. G2: Einfluss der Zentrenlage

3.4.1. Exakt gepaarte Verschiebungen

Bei fester Breite $\sigma = 0,025$ werden fünf Grössen von zehn bis 10^5 Punkten untersucht. Je zehn unabhängige Wolken werden an dieselben 34 Zentren verschoben: 25 geschichtet

zufällige Positionen, das Zentrum $(1/2, 1/2)$ und acht geometrische Kontrollen an zwei ausgewählten Dreiecken. Insgesamt entstehen 1700 Bäume.

Die gezogenen Gleitkommaoffsets werden rational repräsentiert und die Zentren rational addiert. Dies macht nicht die Normalverteilung exakt, erhält aber die realisierte relative Anordnung beim Verschieben exakt. Anders als in G1 wird kein Punkt verworfen oder nachgezogen; ein Grenzübertritt hätte die Serie angehalten. Keiner trat auf. Alle Bäume bestanden die leichten Prüfungen, 68 kleine Kontrollbäume zusätzlich die vollständigen Prüfungen.

3.4.2. Mittelwerte und ein Gegenbeispiel

Für Wolke r und Zentrum c sei $L_{r,c}$ die Blattzahl. Ausgewertet werden $\bar{L}_c = 10^{-1} \sum_{r=1}^{10} L_{r,c}$ und

$$\hat{R} = \frac{\max_c \bar{L}_c}{\min_c \bar{L}_c}.$$

Dieser Quotient geschätzter Mittelwerte ist vom Extremquotienten einer einzelnen Wolke zu unterscheiden. Eine hypothetische Schranke für Erwartungen impliziert keine punktweise Schranke. Bei 10^5 Punkten beträgt die relative Spannweite etwa 0,425 %. Das ist

Tabelle 3.2.: G2: Spannweite der Zentrenmittel über je zehn gepaarte Wolken. Die Extremzentren dürfen zwischen Größenstufen wechseln.

n	$\min_c \bar{L}_c$	$\max_c \bar{L}_c$	$\hat{R}$
10	87,6	120,2	1,372
100	459,6	546,8	1,190
1000	3535,2	3656,0	1,034
10000	33180,7	33728,6	1,017
100000	329657,8	331059,0	1,004

kein Beweis einer Translationsinvarianz. Insbesondere ergibt die siebte Wolke mit zehn Punkten an den Zentren s20 und s34 die Blattzahlen 70 und 153, also

$$153/70 = 2,185714 \dots > 2.$$

Eingaben und Blattzahlen wurden nachträglich rational nachgeprüft. Damit ist die universelle punktweise Faktor-zwei-Schranke widerlegt, nicht eine entsprechende Hypothese über Erwartungen. Die Nachprüfung liefert keine zusätzlichen unabhängigen statistischen Wiederholungen.

3. Statistische Gitterversuche

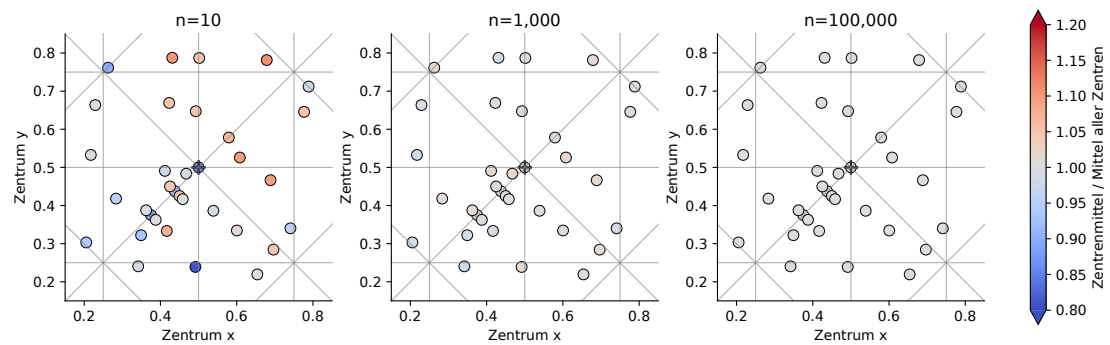


Abbildung 3.4.: G2: räumliche Diagnose an den vorab ausgewählten Zentren. Die Lage zur festen Hierarchie wird sichtbar. Untersucht wurde eine endliche Zentrenmenge, keine kontinuierliche Optimierung über alle Orte.

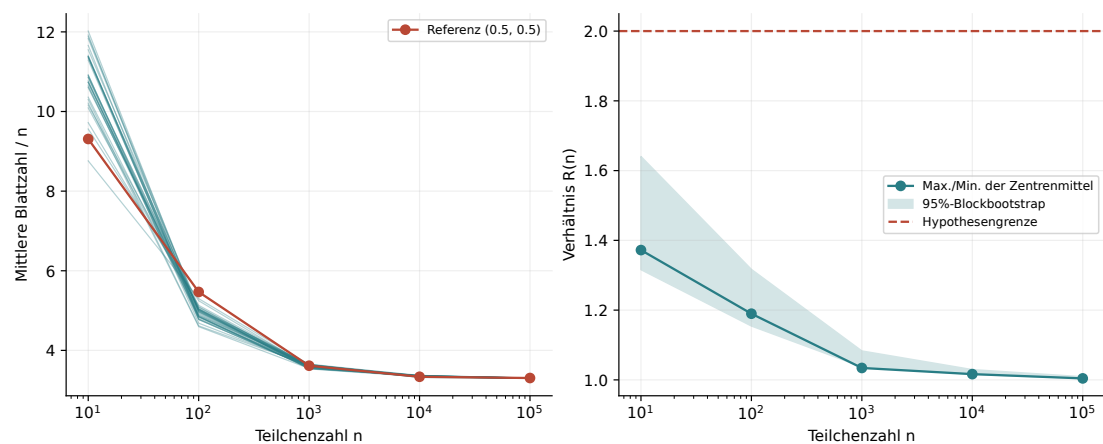


Abbildung 3.5.: G2: Lageempfindlichkeit über die Grössenstufen. Zentrenmittel und einzelne Extremwolken sind unterschiedliche Auswertungsgrößen; Resamplingbereiche sind explorativ zu interpretieren.

3.4.3. Statistische Einschränkungen

Der Blockbootstrap zieht vollständige Wolken mit sämtlichen Zentren und erhält dadurch die Paarung. Bei zehn unabhängigen Blöcken und ausgewählten Extrema sind Perzentilbereiche jedoch keine garantierten simultanen Konfidenzintervalle. Die Auswahl von Maximum und Minimum kann insbesondere eine positive Verzerrung des Quotienten erzeugen. Der ergänzende Permutationstest benötigt Austauschbarkeit der Zentrenlabels, nicht lediglich gleiche Erwartungen. Die Geometrie garantiert diese Annahme nicht. Die archivierten, über fünf Grössenstufen Holm-korrigierten Testwerte werden deshalb nur als explorative Diagnose betrachtet. Auch Abstände zu ausgewählten Verfeinerungskanten ergaben kein konsistentes Gesetz der Form „kantennah ist ungünstig“. Unauffällige Testwerte beweisen umgekehrt keine Gleichheit.

3.5. G3: Mehrere Cluster und ungleiche Besetzung

3.5.1. Design

G3 untersucht 10^5 Punkte mit Komponentenbreite $\sigma = 0,025$. Ein Referenzcluster, zwölf Zweicluster- und neun Vierclusterkonfigurationen bilden 22 Konfigurationen in je zehn gepaarten Blöcken, insgesamt 220 Produktionsbäume. Zwei Cluster haben Abstände $d/\sigma = 2, 4, 8, 16$ und Gewichte 50:50, 90:10 oder 99:1. Vier Cluster liegen auf einem Quadrat mit Seitenlänge d , bei $d/\sigma = 4, 8, 16$ und Gewichten 25:25:25:25, 70:10:10:10 oder 97:1:1:1.

Die Besetzungen $n_j = nw_j$ sind fest, nicht multinomial gezogen. Die erwartete räumliche Dichte ist eine Gaussmischung; die Stichprobe enthält aber keine zufällige Streuung der Komponentenanzahlen. Dieselben Normaloffsets werden innerhalb eines Blocks für alle Konfigurationen verwendet. Lage und Orientierung variieren gemeinsam zwischen Blöcken. Bei ungleichen Gewichten fällt der Massenschwerpunkt nicht mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammen. Dieser Effekt wird nicht von der Gewichtsänderung getrennt.

Die primäre Vergleichsgrösse zur Einclusterreferenz ist

$$\Delta_{r,a} = 100 (L_{r,a}/L_{r,\text{ref}} - 1).$$

Erst nach Bildung dieses gepaarten Quotienten wird über Blöcke gemittelt. Ein Mittel von Quotienten ist im Allgemeinen nicht gleich dem Quotienten der Mittelwerte.

3.5.2. Ergebnisse und Tiefeninterpretation

Alle 220 Bäume wurden aufgebaut; Prüfsummen und Paarungsbeziehungen wurden kontrolliert. Die Konfigurationsmittel von L/n liegen zwischen 3,293470 und 3,313096, bei einer Referenz von 3,298470. Die grösste absolute mittlere gepaarte Änderung ist 0,4444 % für vier Cluster mit $d/\sigma = 8$ und Gewichten 97:1:1:1. Der punktweise Bootstraphbereich reicht ungefähr von 0,158 bis 0,696 %. Dies ist wegen der Auswahl des Extremums und fehlender simultaner Korrektur kein familienweiter Signifikanz- oder Äquivalenznachweis.

Für gut getrennte Komponenten legt Gleichung (3.3) die Verschiebung $\Delta d \approx \log_2 w_j$ nahe. Bei $d/\sigma = 16$ betragen die gemessenen mittleren Verschiebungen $-0,997842$ für zwei und $-1,997462$ für vier gleich besetzte Cluster. Dies passt zur Erwartung von einer beziehungsweise zwei Ebenen weniger als bei einem Cluster gleicher Breite mit allen Punkten; es ist keine exakte Identität für jeden Baum. Im Zweiclusterfall 99:1 mit $d/\sigma = 16$ liegen die mittleren besetzten Tiefen bei 26,121828 und 19,538800. Das Gesamtmittel verschiebt sich gegenüber der Referenz nur um $-0,077149$. Die Hauptkomponente dominiert die globale Kennzahl, während die kleine Komponente deutlich gröber aufgelöst wird. Für spätere Rechnungen mit Begleitstrukturen reicht eine globale Auflösungszahl daher nicht aus.

3.6. Einordnung und Reproduzierbarkeit

Die untersuchten grossen Wolken zeigen annähernd proportionale Blattzahlen und eine vor allem in der Tiefe wirksame Konzentration. Bei kleinen Wolken kann die Lage zur Hierarchie erhebliche Unterschiede bewirken. Die universelle punktweise Faktor-zwei-Grenze ist durch ein überprüftes Gegenbeispiel ausgeschlossen.

Nicht untersucht sind damit beliebig anisotrope Verteilungen, beliebig viele Komponenten oder extrem kleine Satelliten. Hydrodynamische Verfeinerung beruht später auf Fehlerindikatoren, nicht auf einem Punkt pro Blatt. Die Zahlen sind deshalb keine unmittelbaren Speicherprognosen für adaptive Gasrechnungen. Übertragbar sind die Trennung lokaler und globaler Auflösung und die gesonderte Erfassung des Konformitätsaufwands.

Primärartefakte sind die Tabellen des Berichts vom 16. September und die Archive `Gauss_G1`, `Zentren_G2`, `Mehrcluster_G3` vom 17. September. Die Abbildungen werden direkt aus deren Ordern `figures` eingebunden. Es sind eigene Versuchsabbildungen, keine Resultate externer Literatur. Die Protokolle sichern Startwerte, Quellstände, Kontrollumfang und Auswertung. Zeitmessungen verschiedener Implementierungsstände werden nicht zu einer Beschleunigungskurve zusammengezogen. Für eine eigenständige

3. Statistische Gitterversuche

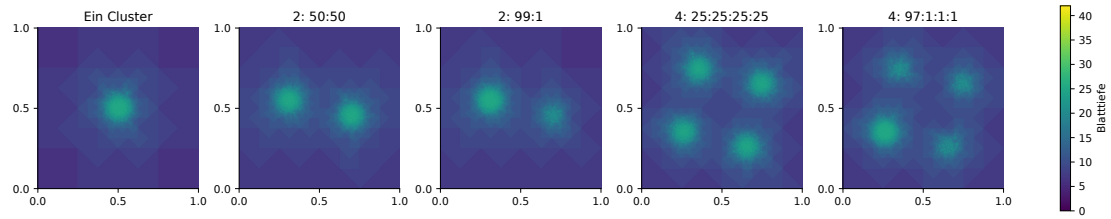


Abbildung 3.6.: G3: Beispielgitter aus Block 1, ohne nachträgliche Auswahl von Extremfällen. Getrennte Verfeinerungsgebiete sind durch ein konformes Umgebungsgitter verbunden.

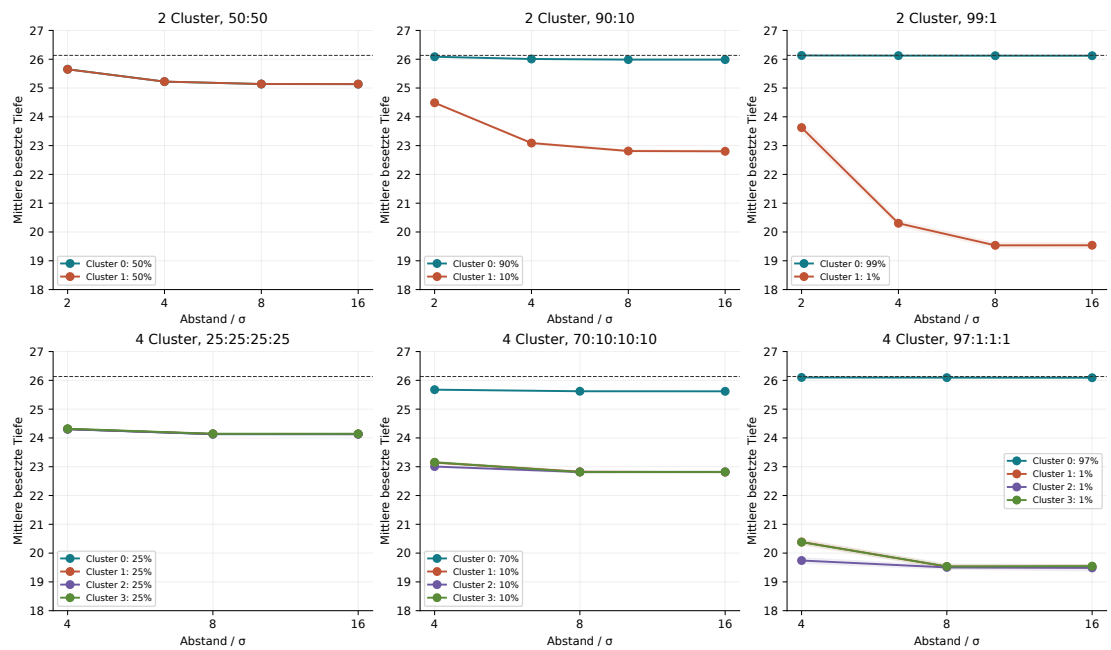


Abbildung 3.7.: G3: komponentenweise Auflösung. Globale Mittelwerte können die größere Auflösung schwach besetzter NebenkompONENTEN verdecken. Labels bezeichnen bei Überlappung keine disjunkten räumlichen Gebiete.

3. Statistische Gitterversuche

Veröffentlichung müssen diese Bilddateien zusammen mit dem Manuskript ausgeliefert werden.

Herkunft und Beitrag: Die Verteilungsserien und die Frage nach der Zentrenlage gehen auf den Autor zurück. Versuchspläne und Diagnostik wurden im Dialog mit ChatGPT präzisiert; die individuelle Zuordnung einzelner statistischer Detailentscheidungen bleibt teilweise offen.

4. Baumgravitation und Teilchendynamik

Die Versuche dieses Kapitels stammen aus den Archiven vom 17. September 2026.

4.1. Physikalisches Modell und Erhaltungsgrößen

Die hierarchische Zusammenfassung ferner Massen knüpft an Barnes und Hut an [3]. Sie ersetzt nicht die Prüfung des Kraftfehlers gegenüber einer direkten Referenz. Bei festen Glättungslängen lautet der verwendete Paaransatz

$$\mathbf{a}_i = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}.$$

Die Bewegung findet in einer Ebene statt; der Kern ist eine geglättete dreidimensionale Newton-Wechselwirkung. Er ist nicht die logarithmische Fundamentallösung einer zweidimensionalen Poisson-Gleichung.

Die Zustandsvariablen sind reale Teilchenpositionen $x_i \in \mathbb{R}^2$ und Geschwindigkeiten v_i , nicht die Schwerpunkte ihrer zugeordneten Dreiecke. Der Baum organisiert die Quellen; er ersetzt die Punktmassen nicht durch homogene Dreiecksmassen. Mit konstanten positiven Massen und festem gemeinsamem ϵ lauten Potentialenergie und Hamiltonfunktion

$$W_\epsilon = -G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\sqrt{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 + \epsilon^2}}, \quad (4.1)$$

$$H = \sum_i \frac{|p_i|^2}{2m_i} + W_\epsilon, \quad p_i = m_i v_i. \quad (4.2)$$

Ableitung nach x_i ergibt $\dot{p}_i = -\nabla_{x_i} W_\epsilon$ und damit die angegebene Beschleunigung. Die Summe über $i < j$ zählt jedes Paar genau einmal. Das isolierte kontinuierliche System erhält H , Gesamtimpuls $P = \sum_i p_i$ und den skalaren ebenen Drehimpuls $J = \sum_i (x_{i,x} p_{i,y} - x_{i,y} p_{i,x})$. Externe zeitabhängige Quellen oder das Entfernen von Körpern verändern diese Bilanz.

4.1.1. Glättung ist Teil des Modells

Für $r \gg \epsilon$ gilt

$$(r^2 + \epsilon^2)^{-1/2} = r^{-1} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2r^2} + O(\epsilon^4/r^4) \right).$$

Bei $r \ll \epsilon$ verhält sich die Beschleunigung dagegen linear zum Abstandsvektor: $a \simeq -Gmr/\epsilon^3$. Glättung beseitigt die singuläre Nahkraft, verändert aber auch die physikalische Wechselwirkung. Die Interpretation als Glättung der Quellenverteilung wird von Barnes diskutiert [5]. Eine Plummer-Glättung ist weder eine Plummer-Anfangsverteilung noch ein allgemeines Modell für die vertikale Struktur einer Gasscheibe. Eine kleinere Glättung verlangt meist strengere Auflösung enger Begegnungen; sie bedeutet nicht automatisch ein besser gelöstes Modell.

4.1.2. Massive und masselose Teilchen

Selbstwechselwirkende Teilchen tragen als Quellen zur Beschleunigung anderer Körper bei. Masselose Testteilchen folgen einem vorgegebenen Feld, ohne dieses zu verändern. Ihre Bahngleichung bleibt sinnvoll, obwohl der kanonische Ausdruck $|p|^2/(2m)$ für $m = 0$ nicht verwendet werden darf. Diagnostische Gewichte eines Testteilchenensembles dürfen nicht mit dynamisch wirksamen Massen verwechselt werden. Diese Unterscheidung trennt insbesondere die späteren Trojanerfilme von den selbstgravitierenden Scheiben- und Kleinkörperrechnungen.

4.2. Was die Codierung leisten kann

Adressen liefern Grössen, Gebiete und Vorfahren. Ein gemeinsames Präfix allein liefert aber keine zuverlässige räumliche Trennung: Benachbarte Gebiete können früh im Baum getrennt werden. Das konkrete Öffnungskriterium ist deshalb mit seiner geometrischen Schranke, seinem Aufwand und seinen Kraftfehlern zu dokumentieren. Ein Monopol benötigt zusätzlich Masse und Massenschwerpunkt; diese werden von unten nach oben aggregiert.

4.2.1. Massenaggregation und Monopolnäherung

Für einen massetragenden Knoten S mit Kindern L, R werden

$$M_S = M_L + M_R, \quad c_S = \frac{M_L c_L + M_R c_R}{M_S}$$

einmal beim Aufbau berechnet. Leere Teilbäume werden in der Kraftsuche übersprungen. Die konformen leeren Gitterzellen bleiben davon unberührt. Mit $\delta_j = x_j - c_S$ gilt $\sum_{j \in S} m_j \delta_j = 0$. Eine Taylorentwicklung des glatten Potentialkerns um c_S zeigt daher, dass der lineare Term verschwindet. Der erste im Monopol vernachlässigte Beitrag hängt von den zweiten Massenmomenten ab. Für ungeschwächte, gut getrennte Quellen liefert dies die Grössenordnung $(D_S/r)^2$ für den relativen Fehler des einzelnen Gruppenbeitrags. Das ist keine Schranke für den relativen Fehler der Gesamtkraft: Mehrere grosse Beiträge können sich nahezu aufheben.

4.2.2. Öffnungsentscheidung und Selbstkraft

Die Tiefe eines Codes ist $d = \text{bitlength}(k) - 1$ und der quadrierte Dreiecksdurchmesser $D_S^2 = 2^{3-d}$. Ein Knoten, dessen Code Präfix des Zielblattcodes ist, wird immer geöffnet. Andernfalls könnte die eigene Masse über einen akzeptierten Monopol zur Selbstkraft beitragen. Fremde Blätter werden direkt ausgewertet. Das klassische Kriterium lautet

$$D_S^2 < \theta^2 |x_i - c_S|^2. \quad (4.3)$$

Kleinere θ erzwingen mehr Öffnungen. Bei $\theta = 0$ werden alle inneren Knoten geöffnet; übrig bleibt die direkte Summe in einer gegebenenfalls anderen Gleitkomma-Reihenfolge.

Die zweite Variante verwendet achsenparallele Begrenzungsrechtecke B_T, B_S des Zielblatts und Quellschaltens. Für jede Koordinate α ist die positive Intervallücke

$$\Delta_\alpha = \max(0, b_{T,\alpha}^- - b_{S,\alpha}^+, b_{S,\alpha}^- - b_{T,\alpha}^+), \quad \delta^2 = \Delta_x^2 + \Delta_y^2.$$

Da $x_i \in B_T$ und $c_S \in B_S$ gilt $\delta \leq |x_i - c_S|$. Der Test $D_S^2 < \theta^2 \delta^2$ ist folglich bei gleichem θ geometrisch strenger als (4.3), bis auf Rundung in der klassischen Rechnung. Berührende Rechtecke haben $\delta = 0$ und erzwingen Öffnung.

In G4 werden die Ecken auf ein gemeinsames Gitter mit Skala 2^h abgebildet. Schreibt man den eingegebenen Gleitkommawert exakt als $\theta = p/q$, lautet die Integerentscheidung

$$2^{3-d+2h} q^2 < p^2 \delta_g^2,$$

wobei δ_g den Abstand auf dem skalierten Gitter bezeichnet. Die geometrische Entscheidung ist damit exakt für diesen gespeicherten Parameter, nicht die anschliessende Gleitkomma-Kraftsumme. Die Rechtecke werden vorbereitet und wiederverwendet. Dies ist bereits implementierte Integergeometrie; die in Kapitel 2 diskutierte schnellere Dekodierung ist eine davon zu unterscheidende offene Optimierung.

4.2.3. Algorithmus und Aufwand

Listing 4.1: Schematische Kraftsuche; Geometrie und Massenaggregate sind vorbereitet.

```
acceleration(target):
    stack = [root]; a = 0
    while stack is not empty:
        node = pop(stack)
        if node has zero mass: continue
        if node is target leaf: continue
        if node is internal and
            (node contains target or opening test fails):
            push occupied children
        else:
            a += softened monopole contribution(node, target)
    return a
```

Die Hierarchie reduziert bei geeigneter Verteilung die Zahl der ausgewerteten Quellenbeiträge. Die bekannte günstige Skalierung von Barnes–Hut [3] ist keine garantierte Laufzeit für jede degenerierte Punktverteilung und jedes Öffnungskriterium. Vollständiges Öffnen für alle Ziele führt wieder zu quadratischer Arbeit. Bei bewegten Teilchen müssen Zuordnung und Massenaggregate aktuell sein; die hier dokumentierten Dynamikläufe bauen sie je Kraftauswertung neu.

4.3. G4: Statischer Kraftvergleich

Drei feste Wolken mit je 10^5 Punkten untersuchen Gleichverteilung, eine Gausswolke und zwei Gausswolken mit 90:10-Besetzung. Die Gaussbreite beträgt 0,025; alle Massen sind $1/n$, $G = 1$ und $\epsilon = 0$. Pro Wolke werden 128 Ziele ohne Zurücklegen ausgewählt. Für jedes Ziel summiert die direkte Referenz sämtliche 10^5 Quellen. Beide Baumkriterien verwenden dieselben Ziele bei $\theta = 0,3, 0,5$ und $0,8$. Drei Wiederholungen messen lediglich die Laufzeit; es handelt sich nicht um drei unabhängige Wolken.

Die relative Fehlerkennzahl ist

$$e_i = \frac{|a_i - a_i^{\text{dir}}|}{\max(|a_i^{\text{dir}}|, 10^{-12} a_{\text{RMS}})}, \quad a_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{128} \sum_i |a_i^{\text{dir}}|^2}.$$

Die Implementierung begrenzt den Nennerboden zusätzlich nach unten durch 10^{-300} ; diese Sicherung ist für die vorliegenden Wolken nicht bestimmend. Der kleine Nennerboden vermeidet eine undefinierte Kennzahl bei verschwindender Referenzkraft, beseitigt

Tabelle 4.1.: G4 bei $\theta = 0,5$. Zeiten sind Mediane für 128 Ziele, nicht für alle 10^5 Teilchen. Q_{95} bezeichnet das Fehlerquantil.

Wolke	Kriterium	Zeit [s]	Q_{95} [%]	Maximum [%]
Uniform	klassisch	0,199	1,498	3,757
Uniform	Integer	0,504	0,960	1,722
Ein Zentrum	klassisch	0,288	1,146	1,977
Ein Zentrum	Integer	0,668	0,619	1,319
Zwei Zentren	klassisch	0,257	1,329	7,635
Zwei Zentren	Integer	0,617	0,687	2,387

aber keine physikalische Kraftauslöschung. Quantile dieser Stichprobe sind keine Konfidenzintervalle für sämtliche Teilchen. Das Integerkriterium besucht etwa 44–50 % mehr Knoten und benötigt in dieser Pythonfassung das 2,32- bis 2,53-Fache der Zeit. Sein 95-Prozent-Fehlerquantil ist zugleich 36–48 % kleiner. Ein fairer Optimierungsvergleich müsste gleiche erzielte Genauigkeit anstreben, nicht bloss denselben Öffnungsparameter. Analytische Zweikörperkräfte, individuelle Massen, Selbstkraftausschluss, Schwerpunkte,

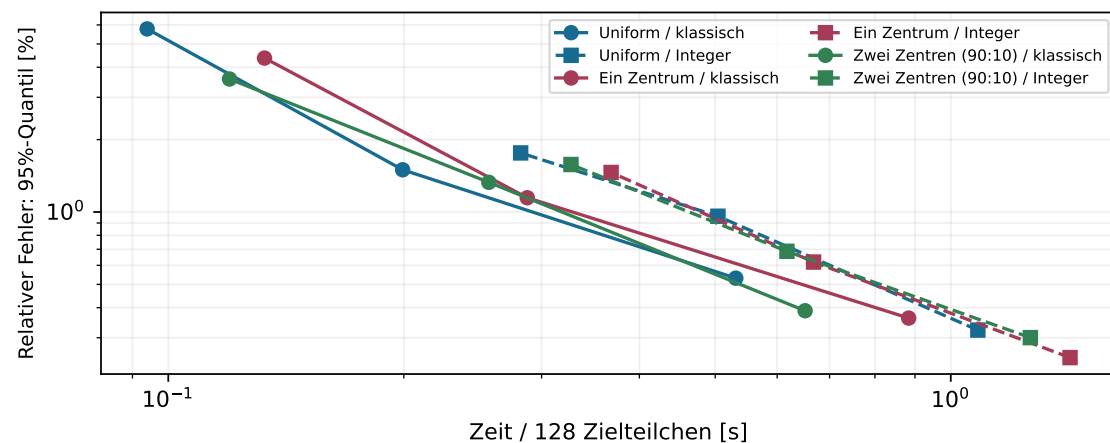


Abbildung 4.1.: G4: archivierter Genauigkeits-Kosten-Vergleich. Je Kurve entsprechen drei Punkte den drei Öffnungsparametern. Verbindungslinien sind Leshilfen und keine zusätzlichen Messungen.

Rechtecke und Grenzfälle ergänzen die Stichprobenprüfung. Ein Blatt pro Teilchen garantiert keinen Mindestabstand. Der Test eines Paares im Abstand 10^{-20} reproduziert bei Einheitsparametern die Beschleunigungsgrösse 10^{40} ; zugleich zeigt er, warum die Zeitintegration ungeschwächter Nahbegegnungen anspruchsvoll bleibt.

4.4. Zeitintegration und getrennte Fehlerquellen

4.4.1. Kick–Drift–Kick

Für die separierbare Hamiltonfunktion zerfällt die Entwicklung in einen Impuls bei festem Ort und einen freien Transport bei festem Impuls. Die symmetrische Komposition ergibt

$$v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2}a(x_n), \quad (4.4)$$

$$x_{n+1} = x_n + hv_{n+1/2}, \quad (4.5)$$

$$v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{h}{2}a(x_{n+1}). \quad (4.6)$$

Nach der Initialisierung wird nur eine neue Kraftauswertung pro Schritt benötigt. Für hinreichend glatte exakte Kräfte ist dies ein Verfahren zweiter Ordnung. Die geometrischen Eigenschaften des Störmer–Verlet-Verfahrens werden in [6] dargestellt. Bei konstantem Schritt und Hamiltonschen Kräften ist es symplektisch, aber nicht exakt energieerhaltend. Die einseitige Baumapproximation erzwingt weder paarweise Gegenkräfte noch einen gemeinsamen diskreten Potentialgradienten. Deshalb wird diese Symplektizitätsaussage nicht unesehen auf die gesamte CFK-Rechnung übertragen.

Die Pythonreferenz verwendet zusätzlich adaptives DOP853; die native C++-Variante verwendet für entsprechende adaptive Aufgaben DOPRI5. Diese Verfahren sind nicht identisch. Eine adaptive lokale Fehlerkontrolle begrenzt zudem nicht unmittelbar den räumlichen Baumkraftfehler. Zur Untersuchung müssen mindestens Zeitschritt, Öffnungsparameter und physikalische Glättung getrennt variiert werden.

4.4.2. DYN_G1: analytischer Zweikörpertest

Zwei Massen von je 0,5 starten bei $G = 1$ im Perizentrum mit relativer grosser Halbachse $a = 0,3$. Kreisbahn und Ellipse mit Exzentrizität $e = 0,6$ werden über zehn Umläufe mit der Lösung der Kepler-Gleichung verglichen. Der Positionsfehler ist der maximale Teilchenabstand zur Referenz an den Ausgabezeiten, nicht eine zeitkontinuierliche Schranke. Die annähernde Viertelung des Positionsfehlers bei Halbierung von h passt zur zweiten Ordnung. Die deutlich anspruchsvollere Perizentrumsphase erklärt den höheren Fehler der exzentrischen Bahn. DOP853 erreicht im gleichen Test maximale Positionsfehler von $7,71 \cdot 10^{-11}$ beziehungsweise $1,26 \cdot 10^{-9}$. Auch das sind endliche numerische Fehler, keine exakte Integration. Ein ergänzender kurzer 36-Körpertest vergleicht die CFK-Kräfte gegen direkte DOP853-Kräfte. Bei $h = 0,0005$ und $t = 0,02$ steigt der Positionsfehler von $7,87 \cdot 10^{-9}$ bei vollständigem Öffnen auf $1,52 \cdot 10^{-5}$ bei $\theta = 0,6$. Zugleich steigt der Impulsfehler von $2,39 \cdot 10^{-17}$ auf $1,35 \cdot 10^{-4}$. Dies macht die fehlende paarweise Symmetrie der Baumkraft messbar.

Tabelle 4.2.: DYN_G1: KDK über zehn Umläufe. Die Kreisbahnenergie ist ein besonders günstiger Spezialfall, kein Nachweis vierter Methodenordnung.

e	Schritte/Umlauf	Positionsfehler	relativer Energiefehler
0	400	$7,79 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-8}$
0	800	$1,95 \cdot 10^{-4}$	$9,51 \cdot 10^{-10}$
0	1600	$4,87 \cdot 10^{-5}$	$5,95 \cdot 10^{-11}$
0,6	400	$4,90 \cdot 10^{-2}$	$1,83 \cdot 10^{-3}$
0,6	800	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$4,57 \cdot 10^{-4}$
0,6	1600	$3,16 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-4}$

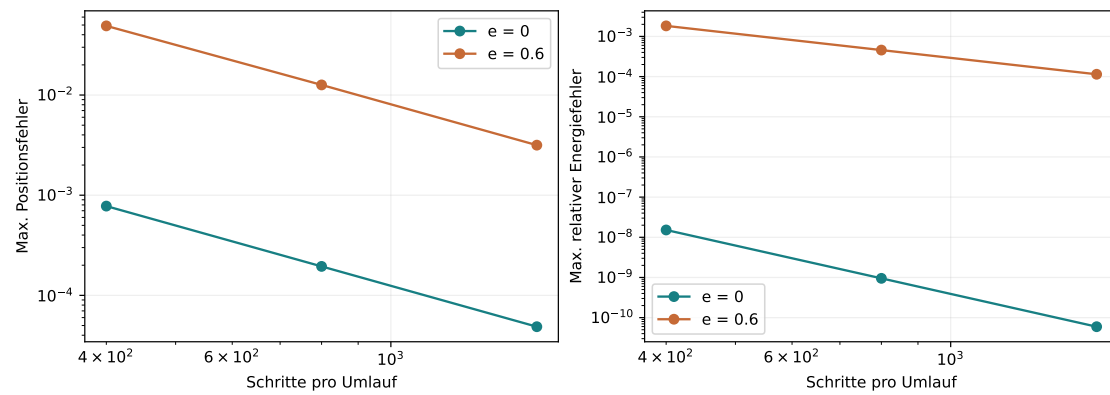


Abbildung 4.2.: DYN_G1: archivierte Konvergenzdiagnose. Orts- und Energiefehler werden getrennt betrachtet. Bei zwei Körpern gibt es keine akzeptierten Mehrteilchengruppen; der Test validiert nicht die grosse Baumapproximation.

4.5. DYN_G2: Ringe, Kollaps und Geometrieabhängigkeit

4.5.1. Ein Ring ist nicht schon durch seine Form validiert

Im externen Keplertest umkreisen 24 nicht rückwirkende Teilchen eine feste Zentralmasse mit Radius $R = 0,23$. Analytisch gelten $v = \sqrt{GM/R}$ und $\Omega = \sqrt{GM/R^3}$. Nach fünf Umläufen beträgt der maximale Phasenfehler bei 400 Schritten pro Umlauf $2,606 \cdot 10^{-3}$ rad; bei 800 Schritten ist er $6,516 \cdot 10^{-4}$ rad. Eine optisch schmale Ringform schliesst einen gemeinsamen Phasenfehler nicht aus.

Davon getrennt wird ein selbstgravitierender Ring mit Gesamtmasse 0,001 und einer frei beweglichen Zentralmasse 1 untersucht. Für n gleich schwere Ringteilchen der Masse m ergibt die radiale Summe der Nachbarkräfte die Kreisfrequenz

$$\Omega^2 = \frac{G}{R^3} \left(M + \frac{m}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin(\pi k/n)} \right).$$

Dies konstruiert ein rotierendes reguläres Polygon. Seine Existenz ist kein Beweis seiner Stabilität gegen Störungen. Die Rechnung über zwei Umläufe ohne bewusst eingesetzte Störung beantwortet diese Stabilitätsfrage nicht.

4.5.2. Kalte Scheibe und diskrete Symmetrie

Die kalte Scheibe enthält 61 gleich schwere Punkte eines Dreiecksgitters im Radius 0,24, Gesamtmasse 1 und Anfangsgeschwindigkeit null. Sie besitzt sechsfache diskrete, nicht kontinuierliche Rotationssymmetrie. Mit der festen Partnerpermutation p der 60-Grad-Drehung wird

$$S_6(t) = \left(\frac{1}{N} \sum_i |x_{p(i)} - c - R_{60}(x_i - c)|^2 \right)^{1/2}$$

gemessen. Diese Grösse hat die Dimension einer Länge und kann auch Schwerpunktdrift enthalten. Die Serie endet bewusst vor sehr engen Begegnungen bei $t = 0,075$; ein Abstandsmonitor ist kein kontinuierlicher Kollisionsdetektor.

Die direkte KDK-Rechnung mit $h = 0,000125$ liefert einen Positionsfehler von $9,614 \cdot 10^{-8}$ gegenüber der direkten adaptiven Referenz. Bei gleichem Schritt steigt er mit CFK auf $8,719 \cdot 10^{-5}$ für $\theta = 0,3$ und $6,777 \cdot 10^{-4}$ für $\theta = 0,6$. Die Symmetriediagnose steigt entsprechend von Rundungsniveau auf $4,303 \cdot 10^{-5}$ beziehungsweise $3,547 \cdot 10^{-4}$. Nach einer Drehung um 17 Grad oder einer Translation werden die Zustände zurücktransformiert. Gegenüber dem unveränderten CFK-Lauf betragen die maximalen Abweichungen $8,407 \cdot 10^{-4}$ und $7,878 \cdot 10^{-4}$. Das physikalische Anfangsproblem ist äquivalent; die Approximation hängt dagegen von der festen Hierarchie ab.

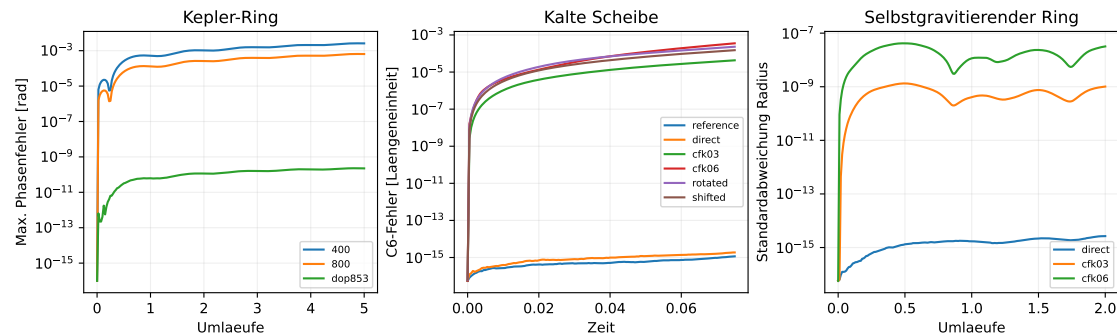


Abbildung 4.3.: Positionsfehler der Ring- und Scheibentests aus DYN_G2. Die Kurven ergänzen die im Text besprochenen Phasen-, Symmetrie- und Erhaltungsdiagnosen; keine einzelne Kennzahl genügt als allgemeines Gütesiegel des Verfahrens.

4.5.3. Übertragung nach C++

Die Serie CPP_DYN_G1 vergleicht ausgewählte native Läufe mit den Pythonreferenzen. Für externen Ring und direkte kalte Scheibe stimmen die gespeicherten Positionen im geprüften Lauf bitgenau überein. Beim selbstgravitierenden CFK-Ring mit $\theta = 0,6$ beträgt die maximale Differenz $2,61 \cdot 10^{-15}$. Der adaptive exzentrische Keplerfall liefert $1,68 \cdot 10^{-10}$ Positionsdivergenz bei unterschiedlichen adaptiven Verfahren. Diese Resultate prüfen die Portierung ausgewählter Fälle, nicht sämtliche Maschinen und Compiler. Parallelisierung, Zeitprofile und Speicherorganisation werden gesondert im Implementationskapitel behandelt.

4.6. Glättungsserie und Begegnungsdemonstration

4.6.1. Plummer_G1: gleiche Physikparameter, getrennte Genauigkeitskontrolle

Die grosse Kollapsserie verwendet 99943 gleich schwere Teilchen, Gesamtmasse 1, Radius 0,2 und einen kalten Anfangszustand auf einem Dreiecksgitter. Die Glättungen sind 0,0125; 0,025; 0,05 und 0,1. Bei $\theta = 0,3$ werden entsprechend die Schritte 0,000125; 0,00025; 0,0005 und 0,001 bis $t = 0,12$ verwendet. Damit wird nicht nur die Modellglättung variiert: Die Schritte werden nach Vorversuchen an den unterschiedlichen Auflösungsbedarf angepasst.

Die Begegnungsserie umfasst 90571 leichte Teilchen mit Gesamtmasse 1 und Radius 0,2 sowie 9409 schwerere mit Gesamtmasse 0,25 und Radius 0,08. Die Geschwindigkeiten $(-3,2, 0)$ und $(12,8, 0)$ ergeben Gesamtimpuls null und Relativgeschwindigkeit 16. Der anfängliche Zentrenabstand ist 0,3. Die Rechnung verwendet $h = 0,00025$, $\theta = 0,5$ und endet bei $t = 0,05$. Isolierte Kontrollwolken dienen dazu, Eigenkollaps nicht ohne Prüfung als Folge der Begegnung zu interpretieren. Es gibt keine Kontaktkräfte, keine Fragmentation und keine Gasphysik.

Für kleine Systeme wird die direkte Paarenergie berechnet. In den grossen Läufen wird das Potential dagegen aus 262144 reproduzierbar gezogenen Paaren geschätzt. Dieselben Paare werden über die Zeit verwendet, um gepaarte Energiedifferenzen zu bestimmen. Der zugehörige Standardfehler betrifft diese Paarstichprobe, nicht Baum-, Integrations- oder Modellfehler. Eine kleine geschätzte Energiedrift ersetzt daher keinen unabhängigen Kraft- und Zeitschritttest.

4.6.2. Galaxy_Demo: sichtbare Gezeiten statt realistischer Galaxie

Die demonstrative Begegnung zweier rotierender Scheiben wurde durch den Wunsch des Autors nach deutlich sichtbarer Dynamik angeregt. Gezeitenbrücken und Schweife als Folge naher Begegnungen sind ein klassisches Thema von Toomre und Toomre [7]; der vorliegende Versuch reproduziert deren Modelle nicht quantitativ. Insgesamt 10000 massive Teilchen bestehen pro Population aus einem Kern der Masse 0,45 und 4999 Scheibenteilchen mit Gesamtmasse 0,05. Alle wirken zurück. Es fehlen Gasphysik und ausgedehnter Dunkelmateriehalo. Die anfängliche Kreisgeschwindigkeit benutzt eine sphärische Näherung der eingeschlossenen Scheibenmasse und ist kein exakt selbstkonsistentes Scheibengleichgewicht.

Der Lauf mit $\epsilon = 0,003$, $\theta = 0,4$ und $h = 0,000025$ reicht bis $t = 0,1$ und benötigte 421,3 Sekunden. Der kleinste gespeicherte Kernabstand ist 0,020703 bei $t = 0,04625$. Der 90-Prozent-Radius der ursprünglichen Population A um ihren Kern wächst von 0,033240 auf 0,364553. Dieser Faktor von ungefähr elf beschreibt Ausdehnung, keine gebundene Masse und keinen abgeschlossenen Verschmelzungsvorgang. Eine eigene umfangreiche Konvergenzstudie wurde für diesen Demonstrationslauf nicht durchgeführt.

4.7. Trojaner: ein anderes dynamisches Modell

Die Serie Trojaner_G1 untersucht 10000 masselose Teilchen um L4 und L5 im ebenen zirkularen eingeschränkten Dreikörperproblem. Sonne und Jupiter laufen auf vorgeschriebenen Kreisbahnen um ihren Schwerpunkt. Zwei Quellen werden direkt summiert; eine

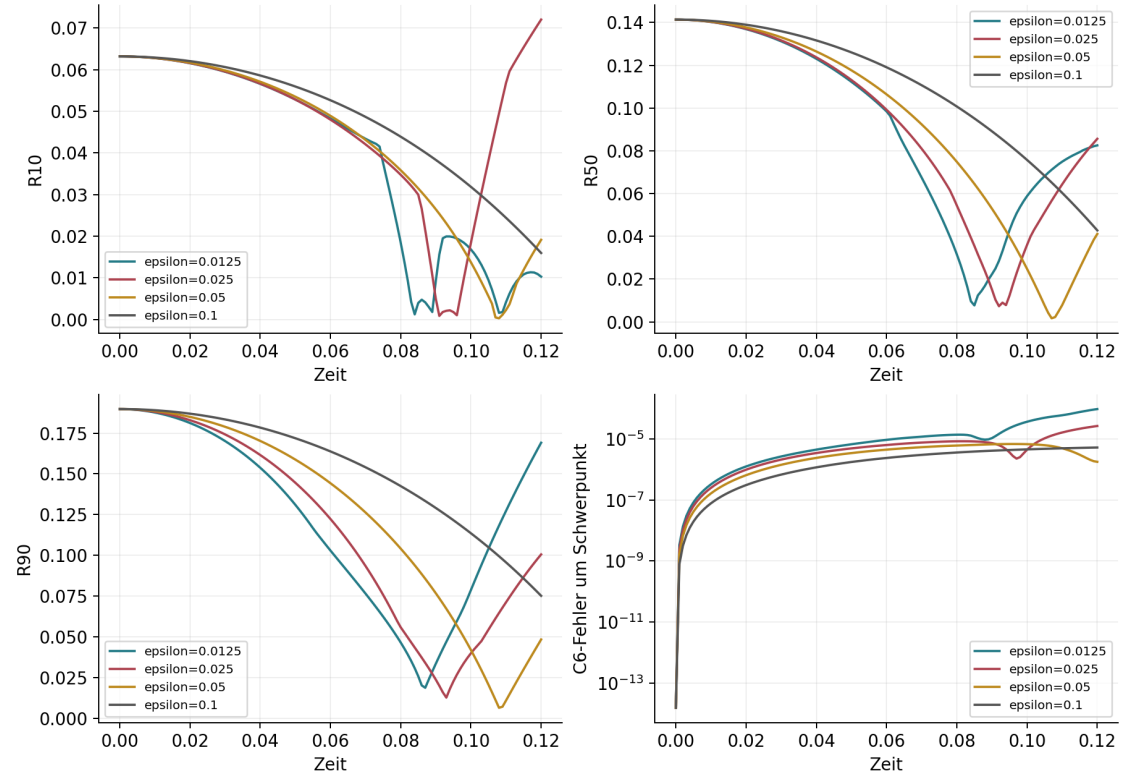


Abbildung 4.4.: Archivierte Kollapsdiagnostik für vier Glättungslängen. R_{10} , R_{50} und R_{90} sind die Radien mit mindestens 10, 50 beziehungsweise 90 Prozent der Masse um den Schwerpunkt. Die Werte beziehen sich auf gespeicherte Zustände. Ein Minimum am letzten Bild kann zeitlich abgeschnitten sein und ist nicht zwingend der abgeschlossene Kollapszeitpunkt.

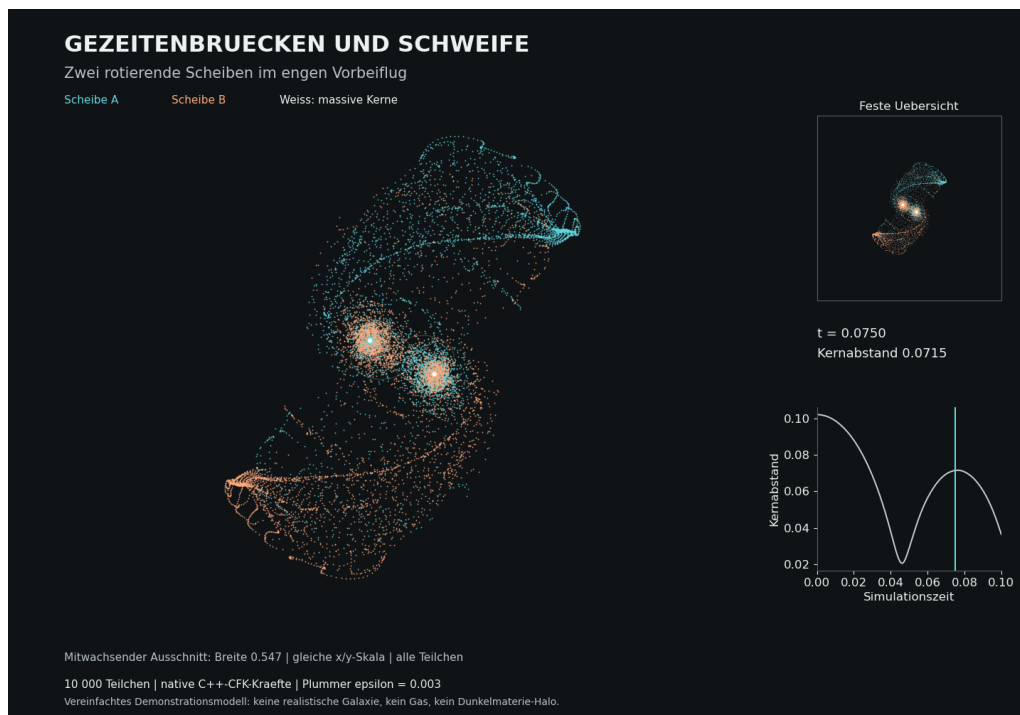


Abbildung 4.5.: Gespeicherter Zustand der Scheibenbegegnung. Farben markieren die ursprünglichen Populationen. Die feste Übersicht ergänzt den veränderlichen Hauptausschnitt, damit Expansion nicht durch einen wechselnden Bildmassstab verborgen wird.

4. Baumgravitation und Teilchendynamik

Baumapproximation wäre hier unnötig. Andere Planeten, Bahnneigungen und gegenseitige Wolkenkräfte fehlen. Der nominelle Kreisabstand beträgt 5,202887 AE.

Im rotierenden Bezugssystem mit Winkelgeschwindigkeit n bleibt die Jacobi-Grösse

$$C = 2 \left(\frac{g_1}{|x - r_1|} + \frac{g_2}{|x - r_2|} \right) + n^2(x^2 + y^2) - [(v_x + ny)^2 + (v_y - nx)^2]$$

erhalten, nicht die inertielle Teilchenenergie im zeitabhängigen Feld. Hier sind $g_j = GM_j$ und x, v baryzentrische inertielle Zustände. Die Formel folgt aus $v_{\text{rot}} = v - n e_z \times x$ und dem effektiven Potential aus Gravitation und Zentrifugalterm.

Breitere Anfangswolken scheiterten zunächst an engen Jupiterbegegnungen und Schrittweitenunterlauf, einmal bereits nach ungefähr 1,54 Jahren, ein weiteres Mal nach etwa 309 Jahren. Die erfolgreiche dritte Serie verwendet ausdrücklich engere Wolken, also ein anderes Anfangswertproblem. Sie erreicht 1000 Jahre mit maximalem relativen Jacobi-Fehler $1,400 \cdot 10^{-13}$. Eine Stichprobe von 128 Teilchen wird mit strengerer Integration verglichen; die maximale Positionsdivergenz zum Hauptlauf beträgt $6,495 \cdot 10^{-9}$ AE. Das ist keine Fehlerschranke für jede Bahn und keine Untersuchung der tatsächlichen Asteroidenpopulation. Feste und mitrotierende Filme verwenden dieselben gespeicherten Zustände. Die

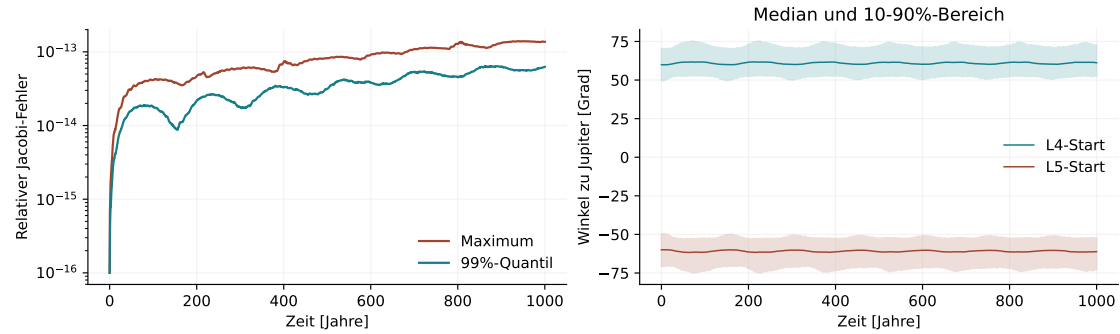


Abbildung 4.6.: Trojaner_G1: Diagnose der erfolgreichen engeren Anfangswolke. Die ausgewiesenen L4-/L5-Fenster sind geometrische Zählbereiche, keine dauerhafte Bindungs- oder Fluchtklassifikation.

zweite Darstellung transformiert sonnenzentrierte Positionen mit $q' = R(-nt)(x - r_1)$, sodass Jupiter bei $(a, 0)$ bleibt. Eine geeignete Darstellung macht die Librationsbewegung sichtbar, ohne die zugrunde liegende Integration zu verändern.

4.8. Gravitierende Kleinkörper im Sonnensystem

4.8.1. Modell, Aufteilung und Ereignisse

ROCKS_G2 verwendet 10^5 gleichmassige Körper mit Durchmesser 1 km und angenommener Dichte 3000 kg m^{-3} . Damit ist $m = \pi \rho d^3 / 6 = 1,5707963 \cdot 10^{12} \text{ kg}$ und die Gesamtmasse $1,5707963 \cdot 10^{17} \text{ kg}$. Sonne und acht planetare Systeme sind massiv; Monde werden nicht einzeln aufgelöst. Die Kleinkörper starten mit konstanter Flächendichte zwischen 0,3 und 35 AE und prograd keplerschen Geschwindigkeiten. Kreisbahnen der Primärkörper sind idealisierte Anfangsdaten, keine astronomischen Ephemeriden.

Alle Wechselwirkungen mit Primärkörpern werden direkt behandelt, nur die gegenseitige Kleinkörpergravitation verwendet den CFK-Baum mit $\theta = 0,4$. Ein Makroschritt $h = 0,005$ Jahre zerfällt in halben Baumimpuls, adaptive direkte Entwicklung und zweiten halben Baumimpuls. Intern verwendet DOPRI5 höchstens 0,001 Jahre. Eine grössere Makroschrittweite vergrössert somit nicht automatisch jeden internen Integrationsschritt.

Beim Oberflächenkontakt wird ein Kleinkörper absorbiert. Masse, Schwerpunkt und Geschwindigkeit des Ziels werden durch

$$m' = m_i + m_j, \quad x' = \frac{m_i x_i + m_j x_j}{m'}, \quad v' = \frac{m_i v_i + m_j v_j}{m'}$$

aktualisiert. Masse und linearer Impuls bleiben bis auf Rundung erhalten. Mechanische Energie wird beim unelastischen Ereignis nicht erhalten; Spin und innere Energie werden nicht verfolgt. Kleinkörperkollisionen untereinander und Fragmentation fehlen. Entfernt werden auswärts laufende Körper jenseits 350 AE mit positiver operativer monopolarer Fluchtenergie. Das ist kein Beweis dauerhaften Entweichens aus dem Mehrkörpersystem.

4.8.2. Zeitschrittversuch und Nachlauf

Die Kurzserie bis 0,1 Jahre vergleicht Makroschritte 0,005; 0,01; 0,025 und 0,05 mit 0,0025 Jahren als feinerer, nicht exakter Referenz. Die maximale Positionsdivergenz liegt zwischen ungefähr 0,13 und 0,17 Metern, die RMS-Differenz nahe 2,1 cm. Alle Varianten ergeben dieselben zwei Einschläge; Kontaktzeiten unterscheiden sich um weniger als zehn Mikrosekunden. Eine quadratische Konvergenz ist darin nicht erkennbar: Der variierte schwache Kleinkörperkraftanteil dominiert den Gesamtfehler hier nicht. Bei zehnfachem Makroschritt sinkt die Gesamtzeit nur von 238,72 auf 209,94 Sekunden. Diese Einzelmessungen sind keine allgemeine Leistungsprognose.

Nach zwei halbstündigen Abschnitten und der genehmigten Nachtfortsetzung erreicht die Gesamtentwicklung 44,495 Jahre. Insgesamt werden 97 Einschläge und keine entfernten

Auswürfe registriert; 99903 Kleinkörper bleiben aktiv. Der Nachtanteil beträgt 40,825 Jahre und 80 Einschläge. Die vollständige Zustandsübernahme wurde mit SHA-256 geprüft. Die Analyse wurde auf schmalzberg ausgelagert. Frühe Kontakte sind auch Folge der idealisierten anfänglichen Belegung von Planetenumgebungen und liefern keine stationäre Einschlagrate. 44,495 Jahre beantworten insbesondere nicht die Frage nach dem Aufräumen des Sonnensystems über Millionen Jahre.

4.9. Offene dynamische Fragen

Das Versuchsregister in Kapitel 8 ordnet die Kraft- und Bahnvergleiche den jeweiligen Genauigkeitsfragen zu.

Offen bleiben insbesondere geometrieunabhängigere Kraftapproximationen, gezielte Nahbegegnungskontrollen, zeitlich und räumlich getrennte Konvergenzstudien sowie geeignete Gleichgewichtsmodelle. Hierarchische Zeitschritte dürfen nicht allein aus Baumtiefe abgeleitet werden: Lokale Kraft, relative Geschwindigkeit und Begegnungszeit enthalten zusätzliche dynamische Information. Die Idee beschleunigter Bitgeometrie ist im projektweiten Ideenspeicher als I-001 vorgemerkt.

Die verwendeten Primärartefakte liegen in G4, DYN_G1, DYN_G2, CPP_DYN_G1, Plummer_G1, Galaxy_Demo, Trojaner_G1 und den ROCKS-Verzeichnissen unter den Berichten vom 17. September. Abbildungen werden aus diesen Archiven eingebunden; Parameter und Versuchsgrenzen sind den jeweiligen Protokollen entnommen.

Herkunft und Beitrag: Die Verbindung des CFK-Baums mit Barnes-Hut, die Diskussion codierungsbasierter Öffnungskriterien und mehrere astronomische Demonstrationen wurden vom Autor angestoßen. Insbesondere stammen die Wünsche nach Glättungsvergleich, Scheibenbegegnung, Trojanerwolken und gravitierenden Kilometerkörpern von ihm. Konkrete Testpläne, Referenzvergleiche und Implementationen wurden mit ChatGPT entwickelt. Nicht belegbare individuelle Detailzuordnungen bleiben offen.

5. Implementierung und Parallelisierung

Dieses Kapitel untersucht Datenabhängigkeiten, Speicherorganisation und gemessene Parallelisierung. Eine zusammenhängende Übersicht der zentralen Algorithmen steht in Anhang C.

5.1. Schichten und Zuständigkeiten

Zu trennen sind exakte Adressgeometrie, aktive Baumtopologie, kompakte numerische Arrays, physikalische Operatoren, Integrator und Ein-/Ausgabe. Eine Adresse ist ein stabiler geometrischer Schlüssel, ein Arrayindex dagegen eine Speicherposition in einem bestimmten Gitterzustand. Verfeinerung darf diese Begriffe nicht vermischen.

5.2. Parallelität als messbare Eigenschaft

Unabhängige Zielteilchen und zellweise Quellen sind natürliche parallele Schleifen. Kantenflüsse sollen einmal berechnet und mit entgegengesetztem Vorzeichen bilanziert werden; konkurrierende Schreibzugriffe benötigen eine explizite Strategie. Baumaufbau, Sortieren, Indexierung und Kraftrechnung werden getrennt vermessen. Zwölf Kerne implizieren keinen Faktor zwölf.

Eine Parallelisierung beginnt mit den Datenabhängigkeiten: Welche Eingaben müssen vollständig vorliegen, welche Ausgaben gehören genau einer Aufgabe, und wo müssen Teilergebnisse zusammengeführt werden? Drei Ebenen sind zu unterscheiden: Pythonprozesse mit getrennten Adressräumen, OpenMP-Threads mit gemeinsamem Speicher und unabhängige Versuche auf mehreren Rechnern. Die letzte Variante erhöht den Durchsatz einer Versuchsserie, beschleunigt aber nicht automatisch einen einzelnen Zeitschritt. MPI-Gebietszerlegung und GPU-Ausführung wurden nicht implementiert.

Eine wichtige historische Unterscheidung: In Python wurden auch die globalen Konformitätsabschlüsse parallel berechnet. Im heutigen C++-Teilchengitterbauer sind Präfixsuche und Konformitätsabschluss dagegen noch seriell. Seine parallele Blattzuordnung

ist kein paralleler Konformitätsabschluss. Auch der entsprechende Hydro-AMR-Umbau ist noch seriell. Das Kapitel beschreibt diese tatsächlichen Entwicklungsstände.

In Python werden Knotencodes in Mengen gespeichert; unveränderliche `frozenset`-Momentaufnahmen können Kopien verursachen. C++ verwendet zusammenhängende numerische Arrays und Kindindizes statt einzeln allozierter Dreiecksobjekte. Das Code-Index-Verzeichnis wird vor parallelen Lesephasen fertiggestellt. Seit CPP_G7 ist es ein kompakter Index mit offener Adressierung. Die Baumcodes bleiben `uint64_t` mit maximaler Tiefe 63. Der Rückfall auf `boost::multiprecision::cpp_int` für besonders feine dyadische Koordinaten hebt diese Adresstiefengrenze nicht auf. Hydro verwendet eine unveränderliche, gemeinsam referenzierte `Grid`-Momentaufnahme; ein gespeicherter Zustand muss zu ihrer Geometrie gehören. Mehrwortige Adressen bleiben eine offene Erweiterung.

5.3. Parallele Konstruktion und Konformität in Python

5.3.1. Geometrische Aufgaben statt beliebiger Teilchenpakete

Sei P die vollständige Punktmenge und $S(P)$ die Menge der wegen Mehrfachbelegung zwingend zu teilenden Dreiecke. Eine beliebige Aufteilung der Punkte genügt nicht: Liegen zwei nahe Punkte in verschiedenen Paketen, erkennt kein Arbeiter die notwendige Teilung ihres gemeinsamen Dreiecks. Die anschliessende Vereinigung kann eine solche fehlende Anforderung nicht nachträglich erraten.

Deshalb partitioniert der Hauptprozess die vollständige Punktmenge entlang der CFK-Hierarchie. Er teilt jeweils eine grosse mehrfach belegte Präfixgruppe und merkt sich diese Teilungsanforderung. Jede verbleibende Aufgabe enthält alle Punkte ihres Präfixdreiecks, bereits in dessen lokale Integerkoordinaten transformiert. Die Aufgabenpräfixe liegen nicht ineinander. Einfach belegte Gruppen benötigen keine weitere Suche. Mit S_0 als groben Anforderungen und S_j als Anforderungen der verbleibenden Aufgaben gilt

$$S(P) = S_0 \cup \bigcup_{j=1}^m S_j. \quad (5.1)$$

Jeder mehrfach belegte Präfix wird entweder oben behandelt oder liegt vollständig in genau einer Aufgabe. Grenzpunkte folgen derselben eindeutigen Integerentscheidung wie im seriellen Verfahren.

Die implementierte Heuristik strebt bis zu $4p$ Gruppen bei p Prozessen an. Sie beendet die Zerlegung auch dann, wenn die grösste Gruppe höchstens 2048 Punkte enthält. Ein Heap wählt jeweils die grösste Gruppe. Diese Werte sind Arbeitsheuristiken, keine

geometrischen Konstanten. Gleiche Punktzahlen bedeuten nicht gleiche Kosten: Ein enges Punktpaar kann viele zusätzliche Tiefenstufen verlangen. Mehr Aufgaben als Prozesse erleichtern die Nachverteilung, verursachen aber zusätzliche Verwaltung.

5.3.2. Die entscheidende Vereinigungseigenschaft

Für eine Anforderungsmenge S sei $\mathcal{C}(S)$ der kleinste Abschluss unter Eltern- und Hypotenusenpartnerbildung. Aus Gleichung (2.5) folgt

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{j=0}^m S_j\right) = \bigcup_{j=0}^m \mathcal{C}(S_j). \quad (5.2)$$

Der globale Abschluss verteilt sich also über die Vereinigung. Dies gilt hier, weil jede Abschlussregel nur *eine* Voraussetzung besitzt: Aus einem Code folgen sein Elterncode und gegebenenfalls sein Partnercode. Keine Regel benötigt erst zwei Anforderungen aus verschiedenen Aufgaben gleichzeitig.

Zum Beweis setze $I = \bigcup_j \mathcal{C}(S_j)$. Jeder Code in I liegt in einem abgeschlossenen Summanden. Alle aus ihm folgenden Codes liegen ebenfalls dort und somit in I . Daher ist I abgeschlossen und enthält sämtliche Anforderungen; die Minimalität ergibt $\mathcal{C}(\bigcup_j S_j) \subseteq I$. Die umgekehrte Inklusion folgt aus der Monotonie des Abschlusses, angewendet auf jeden Summanden.

Global ist dabei wörtlich gemeint: Bei der Abschlussbildung darf ein Arbeiter sein ursprüngliches Präfixdreieck verlassen. Er muss auch Vorfahren und Partner jenseits einer Aufgabengrenze aufnehmen. Die Suchgebiete sind zunächst disjunkt, die abgeschlossenen Ergebnisse dürfen jedoch überlappen. Die Vereinigung entfernt Mehrfachnennungen. Es werden nicht lokal konforme Teilgebiete mit später zu reparierenden Rändern gebaut.

5.3.3. Knoten vereinigen, nicht Blätter

Zu einer abgeschlossenen Menge innerer Knoten I gehört

$$N(I) = \{1\} \cup \{2k, 2k+1 : k \in I\}.$$

Auch diese Abbildung verträgt sich mit der Vereinigung. Deshalb darf die Implementierung vollständige Knotenmengen zurückliefern und vereinigen. Die aktiven Blätter werden erst aus dem Gesamtergebnis bestimmt. Eine Vereinigung der Blattmengen wäre falsch: Ein Code kann in einem Teilergebnis Blatt sein, im anderen aber bereits Kinder besitzen. Elternzelle und Kinder würden dann gleichzeitig als aktive Zellen erscheinen.

Listing 5.1: Verteilter Aufbau mit globalen Abschlüssen. Die Abschlussroutine darf Aufgabengrenzen überschreiten.

```
pruefe und packe die gesamte Punktmenge P
(S0, Aufgaben) = geometrische_Praefixpartition(P)
N = Knoten(globaler_Abschluss(S0))
parallel fuer jede Aufgabe j:
    Sj = zwingende_Teilungen_im_Praefix(j)
    Nj = Knoten(globaler_Abschluss(Sj))
    liefere Nj
vereinige alle Nj mit N
bestimme aktive Blaetter aus dem vereinigten N
```

In der Diagnose U3 war der grobe Abschluss eine zusätzliche Aufgabe. Die spätere schlanke Fassung `2D/particles_distributed.py` schliesst S_0 im Hauptprozess und verteilt die übrigen Aufgaben. Beide verwenden dieselbe mathematische Zerlegung. Die zentrale Vereinigung bleibt seriell; ein verteilter Abschluss ist kein vollständig paralleler Gesamtaufbau.

5.3.4. Prozesskosten und experimenteller Nachweis

`ProcessPoolExecutor` verwendet getrennte Prozesse und serialisierbare Argumente und Rückgaben [8]. Die Implementierung wählt `spawn` ausdrücklich. Ein vorbereiteter Pool kann wiederverwendet werden; beim kalten Pool fallen seine Startkosten dagegen in das Messfenster. Diese beiden Zeitbegriffe sind auseinanderzuhalten.

U2 parallelisierte nur die Präfixarbeit und schloss danach zentral ab. Bei 10^5 Punkten benötigten zwölf Prozesse im Mittel 3,933 statt seriell 3,876 Sekunden: kein Gewinn. U3 verteilte zusätzlich die globalen Abschlüsse. Bei vier vorbereiteten Prozessen sank die mittlere Aufbauzeit von 3,601 auf 2,770 Sekunden, rund 23 Prozent weniger. Je Konfiguration wurden dieselben drei Eingaben verwendet. Dies ist eine explorative Diagnose, keine allgemeine Skalierungsaussage.

Alle 60 U3-Ergebnisse stimmen in den archivierten Baumkennzahlen und Codesignaturen mit der Referenz überein. Der Rückgabepayload stieg bei vier vorbereiteten Prozessen geschätzt von 0,66 auf 4,04 MB; dies sind serialisierte Grössen, keine gemessenen IPC-Bytezähler. Die Summe aller zurückgegebenen Knotenzahlen betrug das 1,0485-Fache der endgültigen Knotenzahl. Diese moderate Überlappung ist ein Versuchsergebnis, keine allgemeine obere Schranke. Prüfung, Packung und Vereinigung bleiben Kosten des Hauptprozesses.

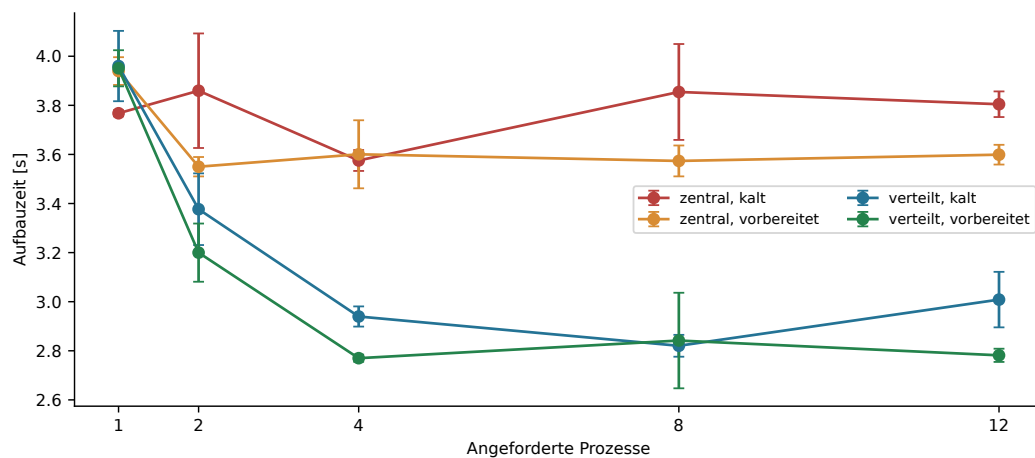


Abbildung 5.1.: Archivierte U3-Diagnose: zentrale und verteilte Abschlüsse, kalte und vorbereitete Pools. Je Konfiguration drei Eingaben mit 10^5 Punkten; Fehlerbalken sind Stichprobenstandardabweichungen. Bei einem Prozess gibt es keinen Pool; Unterschiede dort sind Messstreuung.

5.4. C++: Blattzuordnung im fertigen Gitter

Der native Gitterbauer erledigt Eingabeprüfung und Integerpackung, Präfixsuche, Konformitätsabschluss und Knotenmaterialisierung zunächst seriell. Erst danach steht fest, welches aktive Blatt ein Teilchen besitzt. Die abschliessende Zuordnung wurde in `CPP_G5` parallelisiert.

Alle Iterationen lesen dieselbe fertige Split-Menge. Jedes Teilchen verfolgt seinen eigenen Integerpfad und schreibt genau einen Ausgabeplatz. Auch seine lokalen Koordinaten gehören ausschliesslich dieser Iteration. Gemeinsame Container-Einfügungen oder Gleitkommareduktionen sind nicht erforderlich. Zusammenhängende Indexbereiche werden statisch verteilt; unter 1024 Teilchen bleibt die Schleife seriell.

Ausnahmen, etwa bei Mehrpräzisionsallokationen, werden pro Thread gespeichert und nach Abschluss des Teams weitergegeben. Kein Thread verlässt die OpenMP-Region durch eine ungefangene Ausnahme. Im normalen Schleifenkörper werden keine Sperren benötigt.

Alle 15 Gitteraufbauten ergaben dieselben Codes, Teilungsanforderungen, Blattzuordnungen und Tiefenhistogramme wie das serielle Archiv. Gesonderte Gesamtläufe verkürzten sich im Median von 38,740 auf 27,010 Sekunden, also um 30,3 Prozent. Der Gesamtgewinn bleibt kleiner als der isolierte Gewinn der Zuordnung. Deren Quotient von ungefähr

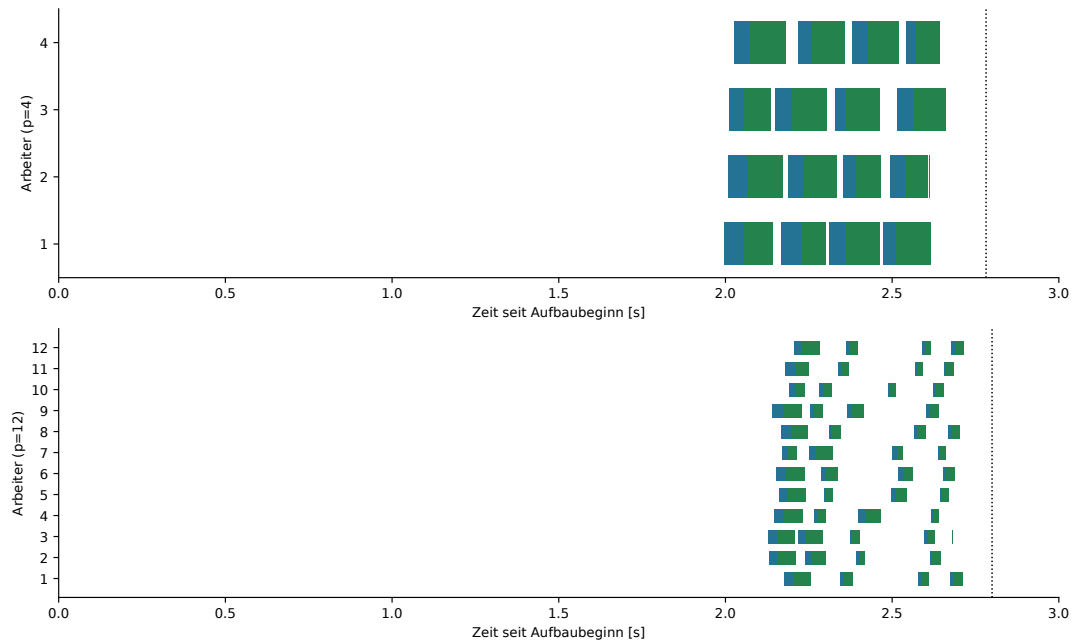


Abbildung 5.2.: Zeitstruktur eines U3-Aufbaus mit vorbereitetem Pool. Blau: Präfixarbeit; Grün: globaler Abschluss im Job. Vor den parallelen Jobs liegt die serielle Vorbereitung. Leere Abschnitte sind keine isolierte Messung von Betriebssystem-Leerlauf. Quelle: erster archivierter U3-Versuch mit vier beziehungsweise zwölf Prozessen.

Threads	Gitter [s]	Zuordnung [s]	Gitter-Speedup
1	17,574	11,041	1,00
2	10,589	4,181	1,66
4	8,630	1,973	2,04
8	7,306	0,902	2,41
12	7,029	0,733	2,50

Tabelle 5.1.: CPP_G5: Mediane aus je drei Aufrufen derselben uniformen Millionenwolke. Die Gitterzeit umfasst alle Aufbauphasen ohne Datei-I/O. Angeforderte und tatsächlich verwendete Teamgrösse stimmen hier überein.

15 bei zwölf Threads ist umgekehrt kein Beweis allgemeiner überlinearer Skalierung: Kernplatzierung auf der hybriden CPU, Takt und Cacheeffekte waren nicht kontrolliert. Phasenmediane unterschiedlicher Messgruppen sind nicht zu einem vermeintlichen Gesamtmedian addierbar.

5.5. Parallelität der Kraftbaumvorbereitung

5.5.1. Unabhängige Knoten nach abgeschlossener Indexierung

CPP_G6 zerlegte die Vorbereitung in Phasen mit unterschiedlichen Abhängigkeiten. Geometrische Validierung ist pro Teilchen unabhängig. Initialisierung und Kindindexsuche sind pro Knoten unabhängig, sobald das Code-Index-Verzeichnis vollständig aufgebaut ist. Jeder Thread schreibt seinen Knoten und liest das unveränderliche Verzeichnis. Duplikatsortierung, Vorfahrensammlung, Indexaufbau und Blattbelegung bleiben seriell. Gleichzeitige ungeschützte Hash-Einfügungen wurden vermieden.

5.5.2. Aggregation von unten nach oben

Ein Elternknoten benötigt die fertigen Massen und Schwerpunkte seiner Kinder. Für zwei Kinder und positive Gesamtmasse gilt

$$M_k = M_l + M_r, \quad \mathbf{c}_k = \frac{M_l}{M_k} \mathbf{c}_l + \frac{M_r}{M_k} \mathbf{c}_r.$$

Verschiedene Eltern derselben Tiefe besitzen disjunkte Kindgruppen. Sobald die tiefere Ebene fertig ist, können sie gleichzeitig bearbeitet werden. Deshalb werden die Codes nach Tiefe gruppiert und die Ebenen absteigend durchlaufen. Zwischen zwei Ebenen wird synchronisiert; andernfalls könnte ein Elternknoten unvollständige Kinddaten lesen. Ebenen mit weniger als 1024 Knoten bleiben seriell.

Listing 5.2: Ebenenweise Aggregation mit festen lokalen Summationsreihenfolgen. Die Ebenen selbst sind nicht unabhängig.

```
belege die besetzten Blaetter
fuer Tiefe d von maximaler Tiefe bis 0:
  parallel pro Knoten k auf Tiefe d:
    falls k kein besetztes Blatt ist:
      addiere Kindmassen: links, dann rechts
      bilde Schwerpunkt: links, dann rechts
  warte auf Abschluss der Ebene
```

Die Reihenfolge links, dann rechts bleibt pro Knoten unverändert. Anders als bei einer ungeordneten parallelen Reduktion ändert die Threadverteilung damit nicht die Reihenfolge seiner Gleitkommaoperationen. Nahe der Wurzel gibt es allerdings nur wenige Knoten; dort ist die Parallelität begrenzt.

5.5.3. Geometrie von oben nach unten

Bei Integerboxen ist die Richtung umgekehrt: Kindgeometrie folgt aus Elterngeometrie. Der Code propagiert die Ecken zunächst seriell bis Tiefe acht und verteilt die dort vorhandenen Teilbaumwurzeln statisch auf Threads. Jeder Thread durchläuft seinen Teilbaum; jeder Knoten wird geometrisch nur einmal berechnet, nicht jeweils erneut ab der globalen Wurzel.

Die Schnittfront ist eine Arbeitszerlegung, kein Bestandteil der Gitterdefinition. Bei konzentrierten Verteilungen können wenige grosse Teilbäume dominieren. Eine feste Tiefe garantiert somit keine gleichmässige Last. Eine kostenabhängige Front bleibt ein möglicher späterer Versuch.

5.5.4. Threadgewinn und Datenstrukturgewinn

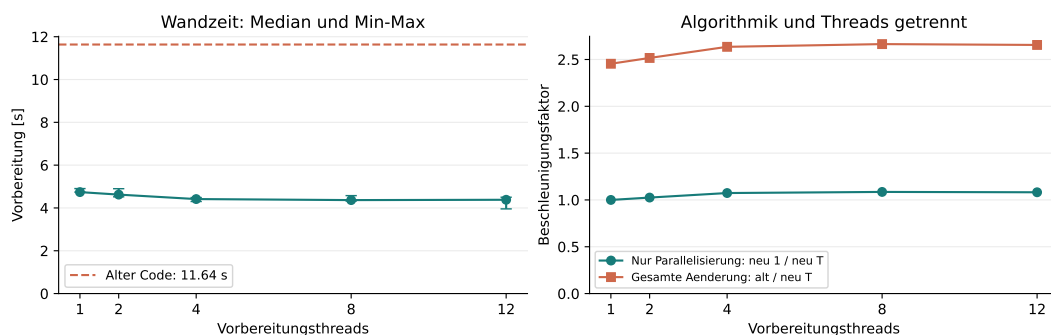


Abbildung 5.3.: CPP_G6: archivierte Skalierung der Kraftbaumvorbereitung. Der Wechsel vom alten zum neuen Code umfasst auch Datenstruktur- und Arithmetikänderungen. Erst der Vergleich der neuen Fassung bei verschiedenen Threadzahlen isoliert deren Threadgewinn. Je Einstellung drei technische Wiederholungen derselben Millionenwolke.

Die alte Vorbereitung benötigte im Median 11,635 Sekunden, die neue mit einem Thread 4,740, mit zwölf Threads 4,382 Sekunden. Der reine Threadgewinn ist damit etwa 1,08, nicht $11,635/4,382 \simeq 2,66$. Zusammenhängende Sortierarrays für Duplikatprüfungen und

die schnelle exakte Integerprüfung erklären einen wesentlichen Teil des Gesamtgewinns. Alle 18 Millionenresultate waren bitgleich zur eingefrorenen Referenz, einschliesslich Durchlaufzählern.

CPP_G7 und CPP_G8 verbesserten danach unter anderem Indexlayout, Reservierung und Wiederverwendung bereits sortierter Gittertopologie. Auch das sind nicht automatisch neue Parallelisierungen. Eine wiederverwendete Topologie muss weiterhin auf Struktur und Belegung geprüft werden; eingesparte Sicherheitsprüfungen wären kein gleichwertiger Geschwindigkeitsgewinn.

5.6. Kraftberechnung: unabhängige Ziele, dynamische Pakete

Die Kraft auf ein Ziel benötigt dessen Daten und den fertigen Quellbaum, nicht die bereits berechnete Kraft eines anderen Ziels. Parallelisiert wird daher die äussere Zielschleife. Jeder Thread besitzt einen eigenen Traversierungsstapel und lokale Zähler und schreibt nur die Ergebnisplätze seiner Ziele. Eine einzelne Kraftsumme wird nicht auf mehrere Threads zerlegt.

Manche Ziele akzeptieren grosse Fernfeldknoten, andere öffnen viele Knoten. Deshalb verteilt die Kraftschleife Zielpakete dynamisch, standardmässig 32 Ziele pro Paket. Ein fertiger Thread übernimmt das nächste Paket. Kleinere Pakete können die Last besser ausgleichen, verursachen aber mehr Verwaltung. Die Paketgrösse ist ein experimenteller Parameter. Statische und dynamische Verteilung sowie Abschlussbarrieren sind OpenMP-Standardmechanismen [9].

Die innere Links-Rechts-Traversierung bleibt für jedes Ziel gleich. Deshalb kann dynamische Arbeitsteilung bitgleiche numerische Ergebnisse zwischen Threadzahlen desselben Builds liefern, ohne ein Ziel dauerhaft einem bestimmten Thread zuzuordnen. Dies ist keine Aussage über die physikalischen Approximationsfehler des Baumverfahrens.

CPP_G7 ergänzt eine optionale Diagnose der aktiven Zeit a_t und Wartezeit w_t pro Thread. Der Anteil $\sum_t w_t / \sum_t (a_t + w_t)$ ist eine Diagnosegrösse, keine CPU-Auslastung und kein isolierter Beweis für Lastungleichgewicht. Die Hauptbenchmarks laufen ohne diese Zusatzinstrumentierung. Angeforderte Threadzahl, tatsächliche Teamgrösse und physische Kernzahl sind getrennte Grössen.

5.7. Hydrodynamik: parallele Operatoren ohne Schreibkonflikte

5.7.1. Rekonstruktion mit überlappenden Lesebereichen

Die Rekonstruktion liest Zellmittelwerte und den vorbereiteten Nachbarschaftsstern einschliesslich reiner Ecknachbarn. Diese überlappenden Lesebereiche sind unproblematisch: Der Zustand der aktuellen Stufe bleibt während der Rekonstruktion unverändert. Jede Iteration schreibt nur Gradienten und Begrenzer ihrer eigenen Zelle. Auch die lokale Positivitätsskalierung ist damit parallel ausführbar. Die benötigten Geometriegewichte liegen bereits vor.

5.7.2. Ein Fluss pro Kante, danach Einsammeln pro Zelle

Würde jede parallel bearbeitete Kante ihren Fluss sofort in beide Zellbilanzen addieren, könnten mehrere Threads dieselbe Zelle gleichzeitig verändern. Die Implementierung trennt daher zwei Phasen. Zuerst berechnet jede Kante genau einen orientierten, mit ihrer Länge multiplizierten Fluss Φ_f . Anschliessend sammelt jede Zelle ihre Beiträge in festgelegter Reihenfolge ein:

$$|K_i| \frac{dU_i}{dt} = - \sum_{f \in \partial K_i} \sigma_{if} \Phi_f. \quad (5.3)$$

Für eine innere Kante sind die beiden Inzidenzvorzeichen σ_{if} entgegengesetzt. Derselbe gespeicherte Fluss tritt deshalb mit entgegengesetztem Vorzeichen in beiden Bilanzen auf. In exakter Arithmetik heben sich innere Beiträge global auf; in Gleitkommaarithmetik bleiben Rundungseffekte der Zellensummen. Atomare Additionen oder Zellensperren sind für diesen Algorithmus nicht notwendig.

Listing 5.3: Konservative parallele Flussauswertung. Phasengrenzen sichern die Datenabhängigkeiten.

```
parallel pro Zelle: rekonstruiere und begrenze
werte
parallel pro Kante: bilde linken und rechten Zustand
werte benutzerdefinierte Randfunktionen seriell aus
parallel pro Kante: berechne einen orientierten Fluss
werte
parallel pro Zelle: sammle ihre Kantenfluesse ein
bestimme globalen Zeitschritt und Diagnostik
```

Benutzerdefinierte Randfunktionen bleiben bewusst seriell: Sie müssen nicht wiedereintrittsfähig sein. Auch die globale Minimumsuche für den Zeitschritt und verschiedene

Diagnosesummen sind seriell. Hydro-Schleifen verwenden statische Verteilung und bleiben unter 256 Einträgen seriell. Zellweise Runge–Kutta-Stufen und Gravitationskicks folgen derselben Besitzregel. Die zeitlichen Stufen selbst bleiben voneinander abhängig.

5.7.3. Adaptation: Felder und Topologie unterscheiden

Sprungindikatoren sind pro Zelle unabhängig. Zielzellen können bei der Übertragung unabhängig schreiben, sobald ihre Quelldaten vollständig vorliegen. Restriktionssummen im alten Baum, Markierungen, Konformitätsabschluss und Topologieänderung bleiben dagegen seriell. Dasselbe gilt für den vollständigen Neuaufbau von Geometrie, Nachbartabellen, Ecksternen und Rekonstruktionsgewichten.

Gerade der Aufbau der Ecksterne schreibt derzeit auch in Nachbarzellen. Die unabhängige parallele *Benutzung* beweist deshalb nicht die Unabhängigkeit ihrer *Konstruktion*. Eine spätere Lösung könnte eine eindeutige Zuständigkeit pro Zielzelle vorsehen. Variable Listen könnten durch getrenntes Zählen, Prefixsummieren und Füllen fester Schreibbereiche entstehen. Dies ist ein Entwurf, keine bereits vermessene Implementierung.

5.7.4. Hydro-Skalierung auf dreihemden

Fall	1 Thread [s]	6 Threads [s]	12 Threads [s]
Sedov, fest	13,839	4,881	5,639
Sedov, adaptiv	2,379	1,106	1,265
Kreisstoss, adaptiv	1,052	0,586	0,669

Tabelle 5.2.: Hydro_CPP_01: Mediane aus je drei technischen Wiederholungen. Native Evolution ohne JSON-I/O und initialen Gitteraufbau; adaptive Topologearbeit während der Evolution ist enthalten. Sechs physische Kerne und zwölf Hardware-Threads, mit aktivierter Kernbindung.

Alle 45 Läufe wurden randomisiert und nacheinander durchgeführt, ohne konkurrierende Benchmark-Jobs. Die numerischen Endzustandshashes stimmten innerhalb jedes Falls über alle Wiederholungen und Threadzahlen überein. Sechs Threads waren für diese Fälle schneller als zwölf. Die Gewinne gegenüber einem Thread betrugen Faktoren 2,84, 2,15 und 1,80.

Mit sechs Threads beansprucht die Phase `topology` beim adaptiven Sedovfall etwa 25 Prozent, beim Kreisstoss etwa 42 Prozent. Sie enthält Indikatoren, Markierung, Abschluss und Tabellenaufbau und ist kein isolierter rein serieller Block. Eine feinere

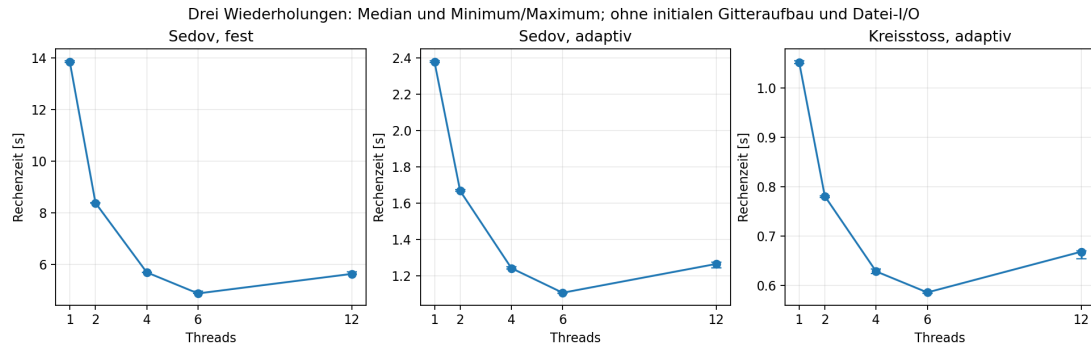


Abbildung 5.4.: Archivierte Hydro-Skalierung: Mediane mit Min–Max-Bereichen. Mehr Hardware-Threads führen nicht monoton zu kürzeren Laufzeiten. Diese Messungen erlauben keine Extrapolation auf beliebig grosse Gitter.

Instrumentierung ist nötig, bevor einer Teilaufgabe der gesamte Engpass zugeschrieben wird.

5.8. Grenzen, Nachweise und offene Aufgaben

5.8.1. Kostenmodell und Reproduzierbarkeit

Für einen idealisierten parallelisierbaren Anteil p und q gleich schnelle Einheiten ergibt die Zerlegung der seriellen Zeit

$$T_q = T_1(1 - p) + pT_1/q + T_{\text{overhead}}(q).$$

Ohne Zusatzaufwand folgt $S_q = 1/((1 - p) + p/q)$. Das erklärt die Begrenzung durch serielle Anteile, sagt reale Zeiten aber nicht voraus. Speicherbandbreite, Caches, ungleiche Aufgaben, Synchronisation und Übertragung verändern die Kosten. Hybride Prozessoren verletzen bereits die Annahme gleicher Einheiten.

Zu jeder Messung gehören Eingaben, Programmstand, Compileroptionen, Threadbindung und Messfenster. Die zitierten Referenzbuilds verzichten auf Fast-Math und FMA-Kontraktion. Bitgleichheit zwischen Threadzahlen desselben Builds ist dennoch kein allgemeines Versprechen zwischen Compilern und Architekturen. Prozesslaufzeit mit Dateiausgabe, native Evolution und isolierte Kraftzeit beantworten unterschiedliche Fragen.

Für Hydro_CPP_01 wurden lokal und auf dreiemden je 32 Python–C++-Fälle mit 1/2/4/6 Threads geprüft: Flüsse, Gradienten, Transfer, AMR sowie längere Kreis- und

Sedovläufe. Referenztoleranzen waren $\text{rtol} = 2 \cdot 10^{-9}$ und $\text{atol} = 5 \cdot 10^{-10}$; Threadvergleiche erfolgten exakt. Ein Build ohne OpenMP und separate ASan/UBSan-Prüfungen sind archiviert. Ein spezieller Race-Detector wurde in den hier herangezogenen Nachweisen nicht ausgeführt; die Leckprüfung war in der überwachten Umgebung deaktiviert. Die Tests ersetzen keinen Sicherheitsbeweis. Der konstruktive Grund für die Konfliktvermeidung ist unveränderliche gemeinsame Eingabe, eindeutiger Schreibbesitz und Synchronisation an Datenabhängigkeiten.

5.8.2. Arbeitsauftrag: paralleler Abschluss in C++

Der Autor verlangte bei der Ausarbeitung ausdrücklich, die fehlende native Übertragung in die Aufgabenliste aufzunehmen. Sie steht als I-013 in `CFK/IDEEN.md`. Ausgangspunkt ist Gleichung (5.2), nicht gleichzeitige ungeschützte Mutation eines gemeinsamen Containers. Ein Prototyp sollte private Anforderungen und globale Abschlüsse bilden und deterministisch vereinigen. Zu prüfen sind exakte Topologiegleichheit, Speicherbedarf, Mehrfacharbeit und Vereinigungszeit an uniformen wie konzentrierten Punktmengen.

Hydro-AMR benötigt zusätzliche Untersuchungen: Die Vereinigungseigenschaft des monotonen Verfeinerungsabschlusses löst nicht automatisch die Vergrößerung, bei der Teilungen entfernt werden. Der Neuaufbau von Nachbarn und Ecksternen ist ebenfalls eine eigene Aufgabe. Erst gemessene Kostenanteile begründen die Priorität dieser Optimierungen. Neue Implementierungen oder Messserien wurden während der Kapitelerstellung nicht gestartet.

5.9. Herkunft und Implementationsnachweis

Herkunft und Beitrag: Der Autor verlangte, die Baumstruktur auch für Hydro beizubehalten, Parallelisierung bei Architekturentscheidungen mitzudenken und verfügbare Rechner zu nutzen. Seine Erinnerung an den bereits parallelisierten Baum motiviert die genaue Trennung der Entwicklungsstände. Die konkrete Ausarbeitung, Implementierung und Auswertung erfolgte im Dialog mit ChatGPT. Prozesspools und OpenMP sind Standardmechanismen. Eine persönliche Erstzuordnung jeder früheren Einzeloptimierung ist aus der nachträglichen Rekonstruktion nicht sicher möglich. Insbesondere wird die Vereinigungseigenschaft ohne Prioritätsrecherche nicht als neue Entdeckung beansprucht.

Quellstellen relativ zu CFK: `2D/particles_distributed.py`, `2D/tree.py` sowie `mesh.cpp`, `gravity.cpp` und `hydro.cpp` in `CPP/src`. Messwerte und historische Quellstände: Archive U2/U3 (16. September), CPP_G5–G8 (17. September) und Hydro_CPP_01 (18. September 2026).

6. Finite Volumen auf dem Blattgitter

6.1. Fragestellung und physikalisches Modell

Ein geometrisch korrektes Gitter ist noch kein Strömungslöser. Es muss festgelegt werden, welche Grössen in einer Zelle gespeichert werden, wie benachbarte Zellen Masse, Impuls und Energie austauschen und wie Unstetigkeiten behandelt werden. Dieses Kapitel entwickelt diese Schritte für ein ideales kompressibles Gas ohne Viskosität und Wärmeleitung. Gravitation wird zunächst weggelassen, damit die Eigenschaften des Hydrooperators getrennt geprüft werden können. Ihre Kopplung folgt in Kapitel 7.

Zwei zweidimensionale Interpretationen verwenden dieselben lokalen Gleichungen, aber unterschiedliche Einheiten. Bei einer in der dritten Richtung invarianten Strömung ist ρ eine Volumendichte; das Integral über die Rechenebene liefert Masse pro Länge in der dritten Richtung. Für eine idealisierte Massenschicht ist ρ eine Flächendichte, und p sowie E sind entsprechend vertikal integrierte Grössen. Die Zustandsgleichung einer solchen Schicht ist eine zusätzliche Modellannahme. Aus einem ebenen Eulerlauf folgt weder eine dreidimensionale Sternstruktur noch die Gültigkeit einer bestimmten Gravitationsgeometrie. Die späteren Sedov-Versuche verwenden ausdrücklich die zylindrische Interpretation.

6.1.1. Zustand, Druck und Energie

Mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ und spezifischer innerer Energie e definieren wir die konservativen Variablen

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m_x \\ m_y \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \rho \mathbf{v}, \quad E = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2. \quad (6.1)$$

Konservativ bedeutet: Ihre Integrale sind die bilanzierten Mengen. Geschwindigkeit und Druck werden daraus berechnet und nicht unabhängig fortgeschrieben. Für das kalorisch

ideale Gas mit konstantem $\gamma > 1$ lautet die Schliessung

$$q(U) = E - \frac{|\mathbf{m}|^2}{2\rho}, \quad p = (\gamma - 1)q, \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho}. \quad (6.2)$$

Hier ist $q = \rho e$ die innere Energiedichte und c die adiabatische Schallgeschwindigkeit. Physikalisch zulässige Zustände erfüllen $\rho > 0$ und $q > 0$. Ein negatives p ist in diesem Modell kein exotischer Gaszustand, sondern ein ungültiges numerisches Ergebnis. Bei stark kinetisch dominierter Energie kann bereits die Differenzbildung in (6.2) empfindlich auf Rundung reagieren.

6.1.2. Die drei Erhaltungssätze

Ohne äussere Kräfte gelten

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.3)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbf{I}) = 0, \quad (6.4)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) = 0. \quad (6.5)$$

Masse wird mit dem Gas transportiert. Der Impulsfluss enthält zusätzlich den Druck als isotrope Kraft auf eine Fläche. Beim Energiefluss kommt zur mitgeführten Energie die Druckarbeit $p\mathbf{v}$ hinzu. In kartesischer Schreibweise ist dies

$$\partial_t U + \partial_x F_x(U) + \partial_y F_y(U) = 0, \quad (6.6)$$

mit

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ (E + p)v_x \end{pmatrix}, \quad F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y^2 + p \\ (E + p)v_y \end{pmatrix}.$$

Diese Form bleibt auch für unstetige Lösungen sinnvoll, wenn man sie integral interpretiert. Genau darauf beruht das Finite-Volumen-Verfahren.

6.2. Von der Integralbilanz zur Zellgleichung

Sei K ein festes Blattdreieck mit Fläche A_K , Randkanten f und äusseren Einheitsnormalen $\mathbf{n}_{Kf}$. Der Divergenzsatz ergibt

$$\frac{d}{dt} \int_K U \, dA = - \int_{\partial K} F_n(U) \, ds, \quad F_n = n_x F_x + n_y F_y. \quad (6.7)$$

Das Vorzeichen ist eine Bilanzkonvention: Ein positiver Auswärtsfluss vermindert den Zellinhalt. Für $u = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ist

$$F_n(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ m_x u + p n_x \\ m_y u + p n_y \\ (E + p)u \end{pmatrix}.$$

Gespeichert wird der Zellmittelwert $\bar{U}_K = A_K^{-1} \int_K U dA$, nicht der Punktwert am Schwerpunkt. Beide stimmen für affine Felder überein, aber nicht für allgemeine Felder.

Die numerische Approximation ersetzt das Kantenintegral durch einen gemeinsamen Fluss aus zwei angebotenen Zuständen:

$$\frac{d\bar{U}_K}{dt} = -\frac{1}{A_K} \sum_{f \in \partial K} |f| \hat{F}(U_{Kf}^-, U_{Kf}^+; \mathbf{n}_{Kf}) =: \mathcal{L}_K(\bar{U}). \quad (6.8)$$

Die Zustände werden hier am Kantenmittelpunkt ausgewertet. Diese Mittelpunktquadratur ist für glatte Flüsse entlang der geraden Kante eine Approximation zweiter Ordnung, nicht das exakte Integral eines nichtlinearen Eulerflusses. U^- kommt aus K , U^+ aus dem Nachbarn oder der Randvorschrift.

Zwei Anforderungen an den Fluss sind grundlegend:

$$\hat{F}(U, U; \mathbf{n}) = F_n(U), \quad (6.9)$$

$$\hat{F}(U_L, U_R; \mathbf{n}) = -\hat{F}(U_R, U_L; -\mathbf{n}). \quad (6.10)$$

Die erste ist Konsistenz, die zweite stellt die gleiche Bilanz auf beiden Seiten einer Kante sicher. Tatsächlich speichert der Code nur einen orientierten Fluss pro innerer Kante. Beim Summieren aller Zellgleichungen heben sich die inneren Beiträge auf; übrig bleibt der Gebietsrand. Für einen konstanten Zustand gilt ausserdem $\sum_f |f| \mathbf{n}_{Kf} = 0$. Ein konsistenter Fluss erhält daher eine freie konstante Strömung, sofern auch die Randzustände dazu passen.

Konformität macht diese Struktur besonders einfach: Jede innere aktive Kante hat einen vollständigen Gegenpartner. Die Integernachbarfunktion wird auf die tatsächlich vorhandenen Blätter aufgelöst. Reine Eckkontakte haben in einem Kantenintegral Mass null und erhalten keinen eigenen Fluss. Sie werden später für die Rekonstruktion wichtig, nicht für eine zusätzliche physikalische Transportverbindung.

6.3. Wellen, Schocks und das Riemannproblem

6.3.1. Was sich über eine Kante ausbreitet

In Normalenrichtung verwenden wir die Koordinate ξ und den Tangentialvektor $\mathbf{t} = (-n_y, n_x)$. Mit $w = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ lautet der lokale Zustand $(\rho, \rho u, \rho w, E)^T$. Die Wellengeschwindigkeiten lassen sich ohne Ausschreiben des komplizierteren konservativen Flussjacobis herleiten. Für glatte, nur in Normalenrichtung veränderliche Zustände ergeben die Erhaltungssätze in primitiven Variablen $W = (\rho, u, w, p)^T$ die Form

$$\partial_t W + B(W) \partial_\xi W = 0, \quad B = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Die letzte Zeile folgt aus der Energiegleichung und $p = (\gamma - 1)\rho e$: entlang einer glatten Teilchenbahn gilt $D_t p = -\gamma p \partial_\xi u$. Die dritte Zeile beschreibt den Transport der Tangentialgeschwindigkeit. Für eine kleine Störung um einen konstanten Zustand bestimmt ein Ansatz $\delta W = \mathbf{r} g(\xi - \lambda t)$ die Gleichung $(B - \lambda I) \mathbf{r} = 0$. Wegen

$$\det(B - \lambda I) = (u - \lambda)^2 [(u - \lambda)^2 - \gamma p / \rho]$$

und der invertierbaren Variablentransformation bei $\rho, p > 0$ sind die Eigenwerte auch des konservativen normalen Flussjacobis

$$u - c, \quad u, \quad u, \quad u + c. \quad (6.11)$$

Die äusseren Familien sind akustische Wellen; die beiden mittleren transportieren einen Dichte-/Entropiesprung beziehungsweise einen Tangentialgeschwindigkeitssprung. Für $\rho, p > 0$ sind alle Geschwindigkeiten reell und es gibt eine vollständige Eigenbasis. Das System ist hyperbolisch, wegen des doppelten Eigenwerts jedoch nicht strikt hyperbolisch.

Auch bei $u = 0$ findet Austausch statt: Druckstörungen laufen mit $\pm c$. Ein blosses Vorzeichen der Gasgeschwindigkeit reicht somit nicht aus, um den korrekten Upwindfluss zu bestimmen.

6.3.2. Warum die Differentialform allein nicht genügt

Bei einem Sprung existieren gewöhnliche räumliche Ableitungen nicht. Die Bilanz über ein dünnes, mit Geschwindigkeit s bewegtes Kontrollvolumen liefert stattdessen die Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$s(U_R - U_L) = F_n(U_R) - F_n(U_L). \quad (6.12)$$

Sie bestimmt die Sprunggeschwindigkeit aus den erhaltenen Grössen. Nicht jede schwache Lösung ist physikalisch zulässig. Für das ideale Gas kann die spezifische Entropie bis auf Skalierung und Konstante durch $s_{\text{th}} = \log(p/\rho^\gamma)$ beschrieben werden. Glatte adiabatische Strömung transportiert sie unverändert; ein physikalischer Schock erzeugt Entropie. In schwacher Form fordert man $\partial_t(\rho s_{\text{th}}) + \nabla \cdot (\rho s_{\text{th}} \mathbf{v}) \geq 0$. Dies verhindert unter anderem unphysikalische Expansionsschocks. Die Positivität von Druck und Dichte allein beweist diese Entropiebedingung nicht.

Das lokale Riemannproblem setzt zu Beginn links und rechts der Kante konstante Zustände U_L und U_R . Seine Lösung hängt von ξ/t ab. Ein exakter Godunovfluss wäre der physikalische Fluss des Zustands bei $\xi/t = 0$. Ein approximativer Riemann-Löser ersetzt diese Wellenstruktur durch eine kostengünstigere Näherung. Das ist etwas anderes als eine naive zentrale Diskretisierung der Differentialgleichung.

6.4. Drei untersuchte numerische Flüsse

6.4.1. Rusanov: eine gemeinsame Dissipationsgeschwindigkeit

Der erste Kontrollfluss lautet

$$\hat{F}_{\text{Rus}} = \frac{F_n(U_L) + F_n(U_R)}{2} - \frac{a}{2}(U_R - U_L), \quad a = \max(|u_L| + c_L, |u_R| + c_R). \quad (6.13)$$

Der zweite Term ist gezielte numerische Dissipation. Für die skalare Transportgleichung $z_t + bz_x = 0$ und $a = |b|$ ergibt dieselbe Formel genau bz_L bei $b > 0$ und bz_R bei $b < 0$: den Upwindfluss. Beim Eulersystem dämpft Rusanov jedoch alle Wellen mit derselben schnellen Skala. Ein ruhender Kontakt mit gleichem Druck und gleicher Geschwindigkeit, aber verschiedenen Dichten, wird dadurch verschmiert, obwohl seine eigene Transportgeschwindigkeit null sein kann. Die grosse Diffusion ist daher kein Beweis eines fehlenden Riemann-Lösers, sondern eine Eigenschaft dieser einfachen Approximation.

6.4.2. Roe: Dissipation nach charakteristischen Wellen

Roes Verfahren [4] konstruiert eine gemittelte Matrix $\tilde{A}$ mit $\tilde{A}\Delta U = \Delta F_n$, wobei $\Delta U = U_R - U_L$. Mit einer Eigenzerlegung $\Delta U = \sum_{j=1}^4 \alpha_j r_j$ ist

$$\hat{F}_{\text{Roe}} = \frac{F_n(U_L) + F_n(U_R)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 |\tilde{\lambda}_j| \alpha_j r_j. \quad (6.14)$$

Statt einer gemeinsamen Geschwindigkeit erhält jede Welle ihre eigene Dämpfung. Die im Projekt verwendeten Mittel sind

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\sqrt{\rho_L}\mathbf{v}_L + \sqrt{\rho_R}\mathbf{v}_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \quad H = \frac{E + p}{\rho},$$

und $\tilde{c}^2 = (\gamma - 1)(\tilde{H} - |\tilde{\mathbf{v}}|^2/2)$. Die vier lokalen Eigenvektoren können als

$$r_{\mp} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \mp \tilde{c} \\ \tilde{w} \\ \tilde{H} \mp \tilde{u}\tilde{c} \end{pmatrix}, \quad r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{w} \\ (\tilde{u}^2 + \tilde{w}^2)/2 \end{pmatrix}, \quad r_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \tilde{w} \end{pmatrix}$$

gewählt werden. Ihre Koeffizienten folgen durch Lösen des linearen Vierersystems für ΔU . Damit ist auch die Scherwelle enthalten; ein rein dreikomponentiger eindimensionaler Löser würde sie nicht abdecken.

Die historische Pythonvariante ersetzt für die akustischen Eigenwerte den Betrag nahe null durch

$$|\lambda|_{\delta} = \begin{cases} (\lambda^2/\delta + \delta)/2, & |\lambda| < \delta, \\ |\lambda|, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \delta = 0,1\tilde{c}.$$

Kontakt und Scherung werden nicht so regularisiert. Diese quadratische Regularisierung ist kein vollständiger Harten–Hyman-Algorithmus und kein allgemeiner Entropiebeweis. Ungültige akustische Zwischenzustände führen zum Rusanov-Rückfall auf der gesamten gemeinsamen Kante. Roe wurde als Vergleichsverfahren untersucht; der heutige native Hydrooperator verwendet HLLC, nicht diese Roe-Implementierung.

6.4.3. HLLC: den Kontakt im Wellenmodell erhalten

HLLC ergänzt im HLL-Wellenmodell eine mittlere Kontaktwelle [10]. Für unsere konkrete Implementierung werden die äusseren Geschwindigkeiten geschätzt durch

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, \tilde{u} - \tilde{c}), \quad (6.15)$$

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, \tilde{u} + \tilde{c}). \quad (6.16)$$

Dies ist eine festgelegte Heuristik mit beiden Endzuständen und dem Roe-Mittel, keine bewiesene exakte Hülle aller nichtlinearen Wellen. Zwischen S_L und S_R liegen zwei Sternzustände, getrennt durch S_M . Normalgeschwindigkeit und Druck sind über diese mittlere Welle gleich.

Die Massen- und Normalimpulsbilanz an den äusseren Wellen ergibt

$$a_L = \rho_L(S_L - u_L), \quad a_R = \rho_R(S_R - u_R), \quad S_M = \frac{p_R - p_L + a_L u_L - a_R u_R}{a_L - a_R}.$$

Der gemeinsame Modelldruck ist $p_* = p_L + a_L(S_M - u_L) = p_R + a_R(S_M - u_R)$. Der Code mittelt die beiden algebraisch gleichen Ausdrücke symmetrisch. Für $K = L, R$ liefern die Sprungbedingungen

$$\rho_{*K} = \rho_K \frac{S_K - u_K}{S_K - S_M}, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{v}_{*K} = \mathbf{v}_K + (S_M - u_K)\mathbf{n}, \quad (6.18)$$

$$E_{*K} = \frac{(S_K - u_K)E_K - p_K u_K + p_* S_M}{S_K - S_M}. \quad (6.19)$$

Die Tangentialgeschwindigkeit bleibt auf jeder Seite erhalten. Die Energieformel ist die Energie-Sprungbedingung, nicht eine nachträgliche Temperaturvorgabe. p_* ist eine Grösse des approximativen Wellenmodells; zusätzlich wird der thermodynamische Druck aus jedem konservativen Sternzustand geprüft.

Mit $F_{*K} = F_n(U_K) + S_K(U_{*K} - U_K)$ lautet der Fluss

$$\hat{F}_{\text{HLLC}} = \begin{cases} F_n(U_L), & 0 \leq S_L, \\ F_{*L}, & S_L \leq 0 \leq S_M, \\ F_{*R}, & S_M \leq 0 \leq S_R, \\ F_n(U_R), & S_R \leq 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

So erklärt die Wellenrichtung, welcher Zustand an der Kante wirksam ist. Bei einem ruhenden reinen Kontakt verschwindet die künstliche Vermischung des idealen HLLC-Modells, anders als beim Rusanovfluss.

Fast verschwindende Nenner, nicht geordnete Wellen, nichtpositive Sternzustände oder nichtendliche Ergebnisse lösen im Code einen gemeinsamen Rusanov-Rückfall aus. Die Nennerprüfung verwendet eine relative Schwelle von 64 Maschinen-Epsilon. Bei rein supersonischem Upwindfluss müssen unbenutzte Sternzustände nicht zulässig sein. Der Rückfall ändert die gemeinsame Kantenbilanz nicht. Er ist aber kein Beweis, dass jede denkbare Expansion oder Vakuumsituation zuverlässig behandelbar ist.

6.5. Lineare Rekonstruktion mit dem CFK-Baum

6.5.1. Was MUSCL verbessert

Ein stückweise konstanter Ansatz, hier P0 genannt, bietet an jeder Kante einfach die beiden Zellmittelwerte an. Auch ein guter Riemann-Löser kann innerhalb einer so beschriebenen Zelle keine räumliche Struktur kennen. Die MUSCL-Idee ist, aus den Mittelwerten

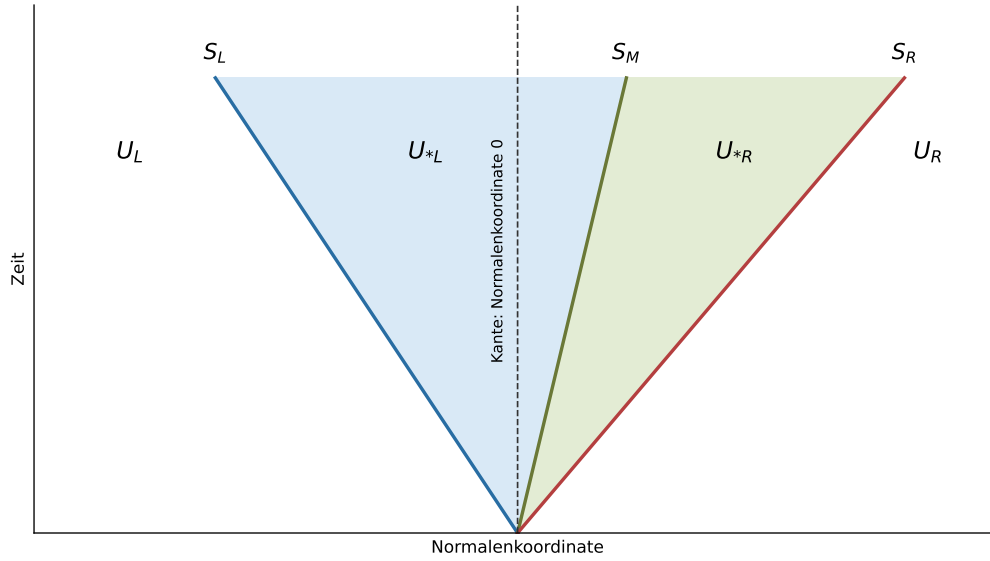


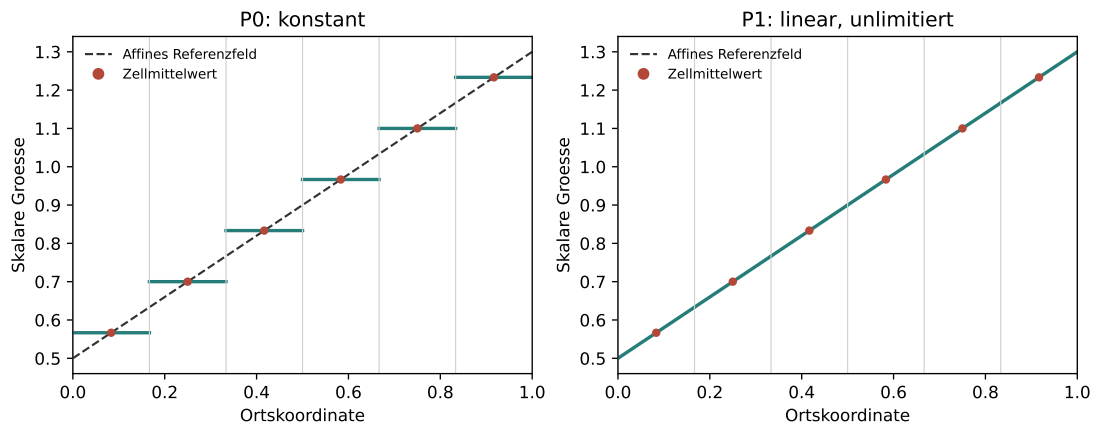
Abbildung 6.1.: Schematischer HLLC-Fächer im Ort-Zeit-Diagramm, keine Simulationsdaten. Im gezeichneten Fall gilt $S_L < 0 < S_M < S_R$; die ortsfeste Kante liegt im linken Sterngebiet. Die schrägen Linien sind Wellengeschwindigkeiten, nicht die Bahnen einzelner Gasteilchen.

eine begrenzte stückweise lineare Verteilung zu rekonstruieren [11]. Rekonstruktion und Flusslöser sind daher kombinierbare, aber verschiedene Bausteine. Unser Ansatz gehört zu dieser Verfahrensfamilie; er ist keine wortgetreue Übernahme der früheren Diplomarbeit und kein MUSCL–Hancock-Zeitverfahren.

Für eine konservative Komponente z verwenden wir

$$z_K(\mathbf{x}) = \bar{z}_K + \mathbf{g}_K \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K), \quad \mathbf{x}_K = \frac{1}{A_K} \int_K \mathbf{x} dA. \quad (6.21)$$

Bei einem Dreieck ist $\mathbf{x}_K$ das arithmetische Mittel seiner drei Ecken. Weil $\int_K (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) dA = 0$, bleibt der gespeicherte Zellmittelwert für *jede* Steigung unverändert. Dies ist die zentrale Erhaltungseigenschaft der Rekonstruktion. P1 bedeutet hier einen affinen Ansatz, nicht eine garantierte globale Konvergenzordnung zwei bei Schocks oder aktiven Begrenzern.



Abbildungung 6.2.: Eindimensionales Erklärungsschema für dieselben Zellmittelwerte. P0 verwirft die lokale Steigung, unlimitedes P1 reproduziert ein affines Feld. Die Punkte sind Mittelwerte, nicht zusätzliche unabhängige Daten. Die Dreiecksrekonstruktion verwendet entsprechend zwei Steigungskomponenten.

6.5.2. Ecksterne durch Transport lokaler Indizes

Zu einer Ecke v von K sei $\mathcal{S}_{Kv}$ die Menge aller aktiven Blätter, die diese Ecke enthalten. Die Rekonstruktionsnachbarschaft ist

$$\mathcal{N}_K = \left(\bigcup_{v=0}^2 \mathcal{S}_{Kv} \right) \setminus \{K\}.$$

Sie umfasst Kantennachbarn und Zellen mit nur einem gemeinsamen Punkt. Der Code erzeugt diese Menge nicht über gerundete Koordinatenvergleiche: Ausgehend von (K, v) überquert er die beiden an v anliegenden Kanten. In gegen den Uhrzeigersinn orientierten Dreiecken sind die Endpunkte einer gemeinsamen Kante entgegengesetzt geordnet. Dadurch wird der lokale Eckindex eindeutig in den Nachbarn übertragen. Eine Besuchsmenge verhindert Mehrfachbearbeitung. Am physischen Rand endet der Umlauf.

Die benötigten Kantennachbarn stammen aus den Integeradressen des Baums. Die geometrische Position einer Ecke ist zum Traversieren nicht nötig. Ein Eckstern ist eine abgeleitete Topologietabelle eines festen Gitters; nach dessen Änderung muss er erneuert werden. Die ersten skalaren Rekonstruktionsversuche erweiterten noch Kantenringe bis zum Rang zwei. Die heutige Eulerrekonstruktion verwendet die Vereinigung der Ecksterne. Diese historischen Varianten dürfen nicht verwechselt werden.

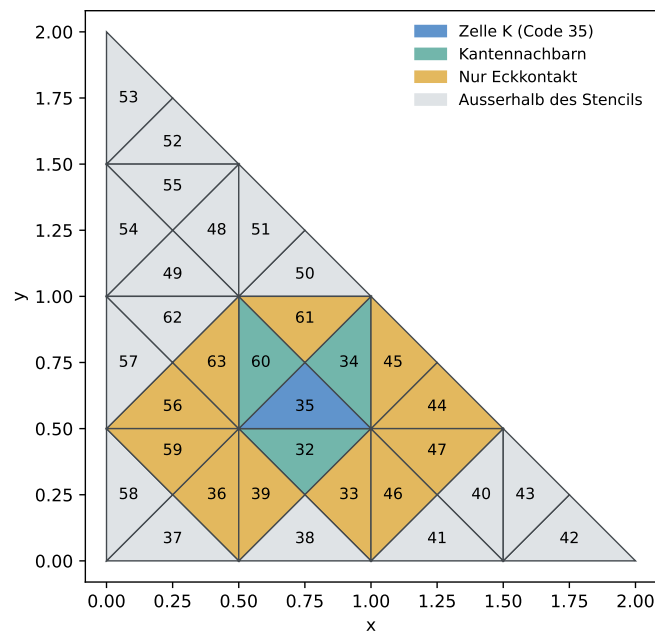


Abbildung 6.3.: Aus den tatsächlichen CFK-Integernachbarn erzeugter Rekonstruktionstencil auf einem kleinen Baum. Grün markiert Kantennachbarn, Gelb zusätzliche reine Ecknachbarn der blauen Zelle. Nur die grünen Nachbarn tauschen unmittelbar Kantenflüsse mit dieser Zelle aus; beide Gruppen beeinflussen ihren Gradienten. Zahlen sind Blattcodes.

6.5.3. Least Squares und affine Exaktheit

Für $J \in \mathcal{N}_K$ setzen wir $\mathbf{d}_J = \mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K$ und $b_J = \bar{z}_J - \bar{z}_K$. Ein affines Feld erfüllt exakt $\mathbf{g}_K \cdot \mathbf{d}_J = b_J$. Für allgemeine Daten passen mehr als zwei Nachbargleichungen nicht exakt zusammen. Wir bestimmen daher

$$\mathbf{g}_K = \operatorname{argmin}_{\mathbf{g} \in \mathbb{R}^2} \sum_{J \in \mathcal{N}_K} (\mathbf{d}_J \cdot \mathbf{g} - b_J)^2. \quad (6.22)$$

Dies ist eine ungewichtete Ausgleichsrechnung, keine Interpolation jedes Nachbarwerts. Schreibe D für die Matrix mit Zeilen $\mathbf{d}_J^T$. Bei Rang zwei ist die Lösung eindeutig. Für affine Daten liegt b im Bild von D und die exakte Steigung wird bis auf Rundung zurückgewonnen. Bei Rangmangel kann eine beliebige zweidimensionale Steigung nicht aus den vorhandenen Daten bestimmt werden; dann setzt der Euler-Code sie auf null. Ein einzelnes Wurzelblatt funktioniert so, ohne erfundene Aussendaten.

Die Normalgleichungen $D^T D \mathbf{g} = D^T b$ verdeutlichen zwar die Algebra, quadrieren aber die Konditionszahl. Python verwendet eine skalierte SVD-Pseudoinverse. C++ benutzt eine skalierte Zweispalten-QR: Für $\ell = \max_{J,a} |d_{J,a}|$ wird $B = D/\ell = QR$ faktorisiert und $\mathbf{g} = R^{-1} Q^T b / \ell$ berechnet. In exakter Arithmetik ergeben beide denselben Least-Squares-Operator bei Rang zwei. Numerisch unterscheiden sich Rangschwellen und Rundung; C++ prüft die beiden QR-Diagonalen gegen 10^{-14} . Die Gewichte hängen nur von der Geometrie ab und werden bis zum nächsten Gitterwechsel zwischengespeichert.

6.5.4. Komponentenweiser Eckbegrenzer

Eine unlimitierte Gerade kann in der Nähe eines Sprungs über die benachbarten Werte hinausschiessen. Mehrdimensionale begrenzte lineare Rekonstruktionen auf unstrukturierten Gittern haben eine etablierte Literatur [12]. Die folgende konkrete Ecksternvariante ist jedoch durch unsere Implementierung definiert, nicht allein durch einen Methodennamen.

Für jede Komponente und jede Ecke werden die Schranken

$$z_{Kv}^{\min} = \min_{J \in \mathcal{S}_{Kv}} \bar{z}_J, \quad z_{Kv}^{\max} = \max_{J \in \mathcal{S}_{Kv}} \bar{z}_J$$

gebildet. Der eigene Mittelwert gehört dazu. Mit $\delta_{Kv} = \mathbf{g}_K \cdot (\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_K)$ setzen wir

$$b_{Kv} = \begin{cases} (z_{Kv}^{\max} - \bar{z}_K) / \delta_{Kv}, & \delta_{Kv} > 0, \\ (z_{Kv}^{\min} - \bar{z}_K) / \delta_{Kv}, & \delta_{Kv} < 0, \\ 1, & \delta_{Kv} = 0, \end{cases} \quad \theta_K = \max(0, \min(1, b_{K0}, b_{K1}, b_{K2})).$$

Die begrenzte Steigung ist $\theta_K \mathbf{g}_K$. Es gibt einen Faktor pro Zelle und konservativer Komponente, nicht einen unabhängigen Faktor pro Ecke. Nur so bleibt ein einziges affines Feld mit unverändertem Mittelwert erhalten.

Die Prüfung an Ecken begrenzt auch affine Werte im Dreieck durch deren konvexe Kombinationen. Trotzdem ist dies kein allgemeines skalares Maximumprinzip für das Eulersystem. Verschiedene Komponentenfaktoren sichern insbesondere noch keinen positiven Druck. Ausserdem können glatte Extrema oder einseitige Randsterne eine korrekte affine Steigung beschneiden. Eine unlimitierte affine Exaktheit darf deshalb nicht als affine Exaktheit des gesamten begrenzten Solvers ausgegeben werden. Der Begrenzer ist auch nicht charakteristisch und nicht invariant unter beliebigen Mischungen der konservativen Variablen.

6.5.5. Gemeinsame Positivitätsskalierung und ihr Beweis

Nach der Komponentenbegrenzung werden alle vier Steigungen einer Zelle zusätzlich mit demselben $\alpha_K \in [0, 1]$ multipliziert. Dies bewegt jeden rekonstruierten Zustand auf einer Geraden zurück zum zulässigen Mittelwert. Das Prinzip solcher mittelwerterhaltenden Skalierungen ist mit Positivitätsverfahren verwandt [14]; deren vollständige DG-/FV-Sätze werden hier nicht pauschal auf unseren Code übertragen.

Warum reicht bei einem affinen Feld die Prüfung der drei Ecken? Die Funktion $f(\rho, \mathbf{m}) = |\mathbf{m}|^2/(2\rho)$ ist für $\rho > 0$ konvex. Ihre zweite Richtungsableitung ist

$$d^2 f[(\delta\rho, \delta\mathbf{m})] = \frac{1}{\rho} \left| \delta\mathbf{m} - \frac{\mathbf{m}}{\rho} \delta\rho \right|^2 \geq 0.$$

Folglich ist $q = E - f$ konkav. Für konvexe Gewichte λ_v gilt

$$q\left(\sum_v \lambda_v U_v\right) \geq \sum_v \lambda_v q(U_v), \quad \rho\left(\sum_v \lambda_v U_v\right) = \sum_v \lambda_v \rho(U_v).$$

Jeder Punkt des Dreiecks ist eine baryzentrische konvexe Kombination seiner Ecken, und ein affines Zustandsfeld respektiert diese Kombination. Positive Dichten und Drücke an den Ecken sichern deshalb in exakter Arithmetik positive Werte im ganzen Dreieck, auch an Kantenmittelpunkten.

Konkret verlangt der Code an jeder Ecke mindestens $10^{-12} \bar{\rho}_K$ und $10^{-12} p(\bar{U}_K)$. Falls der volle Gradient scheitert, sucht er den gemeinsamen Faktor durch 48 Bisektionsschritte und reduziert ihn geringfügig als Rundungsreserve. Dies sind Schranken an der *Rekonstruktion*, keine nachträglichen Dichte- oder Energiefloors der Zellmittelwerte. Der bewiesene räumliche Sachverhalt garantiert noch keinen zulässigen *Zeitschritt*.

6.6. Zeitintegration, CFL und Randbedingungen

6.6.1. Methode der Linien und SSP-RK2

Auf festem Gitter bilden alle Zellgleichungen zusammen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem $d\bar{U}/dt = \mathcal{L}(\bar{U}, t)$. Der verwendete zweistufige Schritt ist

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t \mathcal{L}(U^n, t_n), \quad (6.23)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{2}U^n + \frac{1}{2}[U^{(1)} + \Delta t \mathcal{L}(U^{(1)}, t_n + \Delta t)]. \quad (6.24)$$

Gradienten, Begrenzer und Flüsse werden in jeder Stufe neu bestimmt. Die erste Stufe ist ein Euler-Vorwärtsschritt, die zweite eine konvexe Kombination des Ausgangszustands mit einem weiteren solchen Schritt. Wenn Euler-Vorwärts unter einer Zeitschrittgrenze eine bestimmte konvexe Stabilitätseigenschaft besitzt, kann diese Darstellung sie erhalten [13]. Sie erzeugt die Eigenschaft nicht, wenn der räumliche Operator sie gar nicht besitzt. Insbesondere folgt daraus kein ungeprüftes TVD- oder Positivitätsversprechen für unser mehrdimensionales Eulersystem.

Für glatte Lösungen sieht man die Zeitordnung durch Taylorentwicklung: Im autonomen Fall ist $\mathcal{L}(U^{(1)}) = \mathcal{L}(U^n) + \Delta t \mathcal{L}'(U^n) \mathcal{L}(U^n) + O(\Delta t^2)$. Einsetzen in (6.24) reproduziert die Taylorreihe bis einschliesslich Δt^2 . Das ist eine Zeitaussage bei festem räumlichem Operator, keine Ordnungsaussage über Schockpositionen.

6.6.2. Der tatsächlich verwendete globale Zeitschritt

Mit den an den Kanten geschätzten maximalen Geschwindigkeiten a_f berechnet der Code

$$\tau_K = \frac{A_K}{\sum_{f \in \partial K} |f| a_f}, \quad \Delta t \leq C_{\text{CFL}} \min_K \tau_K. \quad (6.25)$$

Fläche geteilt durch Kantenlänge mal Geschwindigkeit hat die Dimension Zeit. Kleine Zellen und grosse Schall- oder Strömungsgeschwindigkeiten verkürzen den globalen Schritt. Die Wahl $C_{\text{CFL}} = 0,4$ ist der hier häufig verwendete Sicherheitsparameter, kein bewiesenes universelles Optimum. Die Schnittstelle erlaubt höchstens 0,5.

HLLC verwendet dafür auch die geschätzten äusseren Wellengeschwindigkeiten; beim Rusanov-Rückfall gilt die Endzustandsskala aus (6.13). Zusätzlich wird der Schritt durch die nächste Ausgabezeit und eine optionale Maximalweite begrenzt. Nach der ersten RK-Stufe wird die CFL-Zahl aus deren verändertem Zustand erneut geprüft. Scheitert diese Prüfung oder ist eine der beiden Stufen nicht zulässig, wird der Versuch verworfen und Δt halbiert. Der akzeptierte Ausgangszustand bleibt dabei unverändert. Nach begrenzt

vielen Versuchen wird ein Fehler mit Diagnose ausgegeben. Es gibt keinen Beweis, dass Halbierung jedes mögliche Versagen beseitigt.

Auch wenn die gewünschte Ausgabe nur der Visualisierung dient, kann ihre Zeitliste somit die Schrittfolge verändern. Ein Film mit mehr Ausgabezeiten ist nicht zwingend bitgleich zu einer Genauigkeitsrechnung mit weniger Ausgaben. Weiter verwendet AMR im Prototyp dieselben Zeiten für Ausgabe und Gitterwechsel; beide Aufgaben sollten später entkoppelt werden.

6.6.3. Randzustände sind Teil des Modells

Am Rand wird dem Riemann-Löser ein äusserer Zustand angeboten. Drei Varianten sind zu unterscheiden. Bei extrapolierendem Ausfluss gilt $U_R = U_L$; dies ist keine perfekte nichtreflektierende Randbedingung. Eine ruhende reflektierende Wand verwendet $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_L - 2u_L \mathbf{n}$ bei gleichem ρ und p . Masse und Energie sollen dort nicht austreten, normaler Impuls kann dagegen durch die Wandkraft verändert werden. Ein vorgegebener Umgebungs- oder analytischer Zustand bildet eine dritte Variante und kann einströmende Charakteristiken speisen.

Die Sod-Genauigkeitsversuche verwenden analytische Aussenrandzustände. Damit lässt sich die Flussdiskretisierung gegen eine bekannte Lösung prüfen, aber nicht gleichzeitig die Qualität einer offenen Randbedingung. Die radialen Versuche bieten einen konstanten Umgebungszustand an. Randabstand allein beweist nicht Randunabhängigkeit; die tatsächlichen Randflüsse müssen in die Bilanz und Auswertung eingehen.

6.7. Konservative Änderung des Blattgitters

Bei einem Gitterwechsel darf nicht einfach dieselbe Arrayzeile einer anderen Zelle zugeordnet werden. Die Zustände müssen auf die neuen geometrischen Kontrollvolumina übertragen werden. Für zwei gleich grosse Kinder folgt aus der Erhaltung von $\int_K U dA$ die Restriktion

$$\bar{U}_K = \frac{1}{2}(\bar{U}_{2K} + \bar{U}_{2K+1}).$$

Gemittelt werden konservative Grössen, nicht Geschwindigkeit und Druck separat. Beim Verfeinern kann konstant prolongiert werden, oder das begrenzte affine Elternfeld wird im Kindschwerpunkt ausgewertet:

$$\bar{U}_J = \bar{U}_K + G_K(\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_K), \quad J \subset K.$$

Dies ist das exakte Kindmittel des affinen Feldes. Die flächengewichteten Kindschwerpunkte ergeben den Elternschwerpunkt, sodass die Gesamtbilanz erhalten bleibt. Die

Konvexität der zulässigen Zustandsmenge sichert auch zulässige Restriktionsmittel; für die Prolongation gilt der zuvor bewiesene Positivitätsschutz des ganzen Elternfelds.

Die Markierung verwendet in der derzeitigen Variante die maximalen relativen Dichte- und Drucksprünge über Kantennachbarn:

$$\eta_K = \max_{J \sim K} \max \left(\frac{|\rho_K - \rho_J|}{\max(\rho_K, \rho_J)}, \frac{|p_K - p_J|}{\max(p_K, p_J)} \right).$$

Dieser Indikator erkennt Merkmale, ist aber kein bewiesener Diskretisierungsfehlerschätzer. Zwei getrennte Schwellen für Verfeinern und Vergröbern schaffen Hysterese; Pufferringe sollen die Front vor ihrem Weiterlaufen abdecken. Die untersuchten Vorgaben waren beispielsweise 0,10/0,02 beziehungsweise 0,05/0,01 mit zwei Pufferringen.

Zusammengelegt werden nur Blattgeschwister; erforderliche Hypotenusenpartner werden gemeinsam berücksichtigt. Die Verfeinerung ergänzt den Konformitätsabschluss. Ein Zellbudget kann den gesamten Verfeinerungsblock ablehnen; eine optimale Prioritätsvergabe ist noch nicht implementiert. Gitterwechsel erfolgen zwischen vollständigen Zeitschritten, nicht mitten in einer RK-Stufe. Bei streng konformen Kanten und globalen Schritten gibt es weiterhin genau einen gemeinsamen Kantenfluss; eine zusätzliche Grob–Fein-Flusskorrektur ist hier nicht erforderlich. Lokale Zeitschritte würden eine neue konservative Synchronisation verlangen.

6.8. Referenzlösungen und Fehlerbegriffe

Eine scharfe Darstellung ist kein Genauigkeitsnachweis. Deshalb werden Bilanztests, Vergleiche mit analytischen Lösungen und Veränderungen unter Gitterverfeinerung getrennt betrachtet. Ein bestandener Test zeigt eine Eigenschaft für die geprüfte Konfiguration; er beweist nicht die Zuverlässigkeit für beliebige Strömungen.

6.8.1. Welche Grösse wird verglichen?

Für eine bekannte Referenzlösung U_{ex} ist die natürliche Referenz eines Finite-Volumen-Verfahrens der Zellmittelwert

$$\bar{U}_{K,\text{ex}}(t) = \frac{1}{|K|} \int_K U_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (6.26)$$

Insbesondere darf eine Zelle, die einen Schock schneidet, nicht allein mit dem exakten Wert in ihrem Schwerpunkt verglichen werden. Dieser Punktwert kann auf einer Seite

der Unstetigkeit liegen, obwohl die Zelle Masse von beiden Seiten enthält. Für die Dichte verwenden wir

$$L_{1,\rho} = \sum_K |K| |\bar{\rho}_K - \bar{\rho}_{K,\text{ex}}|, \quad \langle L_{1,\rho} \rangle = \frac{L_{1,\rho}}{|\Omega|}. \quad (6.27)$$

Die historischen Roe- und HLLC-Serien berichten die erste, die spätere Euler-Rekonstruktionsserie die zweite Grösse. Das Referenzdreieck hat $|\Omega| = 2$; ohne diese Umrechnung wäre ein Vergleich irreführend. Auch $p(\bar{U})$ ist im Allgemeinen nicht gleich dem Mittelwert von $p(U)$, weil die Rückrechnung der kinetischen Energie nichtlinear ist.

Für glatte Lösungen wird eine beobachtete Ordnung aus zwei Gittern mit charakteristischen Weiten h und $h/2$ bestimmt:

$$r_{\text{obs}} = \frac{\log(\varepsilon_h/\varepsilon_{h/2})}{\log 2}. \quad (6.28)$$

Bei uniformer binärer Dreiecksteilung entspricht die Halbierung einer Längenskala zwei zusätzlichen Bauebenen. Bei Schocks ist eine globale zweite Ordnung nicht zu erwarten: Schon eine Übergangszone mit Breite $O(h)$ und Fehleramplitude $O(1)$ trägt einen Fehler $O(h)$ zum Integral bei. Die Schärfe einer Front und die Ordnung für glatte Lösungen sind deshalb unterschiedliche Qualitätsmerkmale.

6.8.2. Der Sod-Test: eine berechenbare exakte Referenz

Der klassische Test [15] startet mit zwei ruhenden Zuständen

$$(\rho_L, u_L, p_L) = (1, 0, 1), \quad (\rho_R, u_R, p_R) = (0.125, 0, 0.1), \quad \gamma = 1.4. \quad (6.29)$$

Auf dem Dreieck ist die Trennlinie durch $s = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$ gegeben. Die Lösung hängt für $t > 0$ nur von $\xi = s/t$ ab. Sie besteht von links nach rechts aus ungestörtem Gas, einer Verdünnungswelle, zwei durch einen Kontakt getrennten Sternzuständen, einem Schock und rechtem ungestörtem Gas. Am Kontakt stimmen Druck p_* und Geschwindigkeit u_* überein, nicht aber die Dichte.

Die linke Verdünnung ist isentrop, also p/ρ^γ konstant. Aus ihrer Riemann-Invariante $u + 2c/(\gamma - 1)$ folgt die Funktion

$$f_L(p) = \frac{2c_L}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right]. \quad (6.30)$$

Die Rankine–Hugoniot-Bedingungen am rechten Schock liefern dagegen

$$f_R(p) = (p - p_R) \sqrt{\frac{A_R}{p + B_R}}, \quad A_R = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \quad B_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R. \quad (6.31)$$

Beide Beziehungen müssen dieselbe Geschwindigkeit im Sterngebiet ergeben. Daher lösen wir die skalare Gleichung

$$f_L(p_*) + f_R(p_*) + u_R - u_L = 0, \quad u_* = \frac{u_L + u_R + f_R(p_*) - f_L(p_*)}{2}. \quad (6.32)$$

Für genau diese Daten liegt die Nullstelle zwischen 0.1 und 1; die implementierte Bisektion benötigt keine Startschätzung für eine Newton-Iteration. Es ergeben sich ungefähr $p_* = 0.30313$ und $u_* = 0.92745$. Dies ist eine spezialisierte Sod-Referenz, kein allgemeiner exakter Riemann-Löser für beliebige Anfangszustände.

Mit $b = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ und $z = p_*/p_R$ lauten die Sterndichten

$$\rho_{*L} = \rho_L(p_*/p_L)^{1/\gamma}, \quad \rho_{*R} = \rho_R \frac{z + b}{bz + 1}. \quad (6.33)$$

Die vier Übergangsgeschwindigkeiten sind

$$u_L - c_L, \quad u_* - c_{*L}, \quad u_*, \quad u_R + c_R \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2\gamma} z + \frac{\gamma - 1}{2\gamma}}. \quad (6.34)$$

Zwischen den ersten beiden liegt der Verdünnungsfächer. Dort gelten

$$u(\xi) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_L + \frac{\gamma - 1}{2} u_L + \xi \right), \quad (6.35)$$

$$c(\xi) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(c_L + \frac{\gamma - 1}{2} (u_L - \xi) \right), \quad (6.36)$$

$$\rho(\xi) = \rho_L [c(\xi)/c_L]^{2/(\gamma-1)}, \quad p(\xi) = p_L [c(\xi)/c_L]^{2\gamma/(\gamma-1)}. \quad (6.37)$$

Damit ist die Referenz vollständig bestimmt. Im Code werden Dreiecke an den Wellenfronten geschnitten und die Teilflächen integriert. Bei $\gamma = 1.4$ sind die konservativen Variablen im Fächer Polynome bis Grad sieben in ξ ; die verwendete Duffy-Quadratur mit fünf Gauss-Punkten je Richtung integriert sie nach dem Schneiden in exakter Arithmetik exakt. Rundungsfehler bleiben selbstverständlich bestehen. Analytische Aussenzustände am Dreiecksrand machen den Test zu einem gezielten Test des Innenverfahrens, nicht zu einem Test allgemeiner Ausflussrandbedingungen. Die Referenzimplementierung orientiert sich an der öffentlich dokumentierten Riemann-Konstruktion von Clawpack [17].

6.9. Chronologische Validierung des Hydrooperators

6.9.1. Vom diffusen Ausgangsverfahren zu Roe und HLLC

Die erste Euler-Darstellung motivierte die Frage, ob die verbreiteten Fronten aus einer naiven Diskretisierung der Differentialgleichung stammten. Entscheidend ist jedoch

die Kombination aus Fluss und Rekonstruktion: Auch ein konsistenter Rusanov-Fluss kann mit konstanten Zellzuständen stark diffus sein. Die darauf folgenden Reihen trennen deshalb zunächst den Einfluss des Riemann-Lösers von einer späteren räumlichen Rekonstruktion.

Tabelle 6.1.: Planarer Sod-Test auf uniformer Tiefe 12 bei $t = 0.15$: integrierter Dichtefehler $L_{1,\rho}$, noch ohne lineare Rekonstruktion. Quelle: archivierte Reihen Hydro_Roe_01 und Hydro_HLLC_01.

Fluss	0°	30°
Rusanov	0.0358854	0.0480607
Roe	0.0317603	0.0419626
HLLC	0.0317670	0.0420640

Die Roe-Reihe umfasste 24 Genauigkeitsläufe über Tiefen 8, 10 und 12, zwei Orientierungen sowie uniforme und lokal verfeinerte, während des Laufs feste Gitter. Die HLLC-Erweiterung umfasste 36 entsprechende Genauigkeitsläufe. Hinzu kamen vier beziehungsweise sechs längere Animationsläufe. Roe und HLLC verbesserten den Dichtefehler gegenüber Rusanov auf dem feinsten uniformen Gitter um etwa 11–13%, unterschieden sich untereinander aber nur wenig. Die Schlussfolgerung war deshalb nicht, dass ein weiterer Austausch des Riemann-Lösers das Hauptproblem lösen würde, sondern dass nun die räumliche Rekonstruktion untersucht werden musste.

Die HLLC-Reihe zeigte weder Zustandsverwerfungen noch Rückfälle auf den robusten Ersatzfluss; der maximale berichtete Bilanzrest betrug rund $1.69 \cdot 10^{-14}$. Solche Bilanzreste messen die diskrete Buchführung, nicht den Abstand zur exakten Lösung. Der historische Regressionstest reproduzierte die 28 vorherigen Rusanov/Roe-Ausgaben bitweise. Ein separater Rechnervergleich für HLLC ergab Abweichungen bis $2.22 \cdot 10^{-15}$.

6.9.2. Lineare Rekonstruktion mit Ecknachbarn

Die nächste Reihe Hydro_Euler_P1_02 hielt HLLC fest und verglich konstante mit begrenzter linearer Rekonstruktion. Sie enthielt 16 Sod-Genauigkeitsläufe, sechs glatte Transportläufe und zwei Animationsläufe. Das Wort *lokal* bezeichnet in der folgenden Tabelle eine vorab erzeugte lokale Verfeinerung, noch keine zeitlich adaptive Gitteränderung.

Ein erster Ansatz mit nur einem gemeinsamen Steigungsfaktor für alle Komponenten lieferte im groben Sod-Test nicht die gewünschte Verbesserung. Die endgültige Variante begrenzt deshalb zunächst komponentenweise und verwendet erst für die Positivität einen

Tabelle 6.2.: Sod-Test bei $t = 0.15$, Basistiefe 10: flächengemittelter Dichtefehler $\langle L_{1,\rho} \rangle$. P0/P1 bezeichnet hier die Hydro-Rekonstruktion, nicht das Zeitverfahren.

Gitter	Winkel	P0	P1	Reduktion
uniform	0°	0.0219814	0.0142161	35.3%
uniform	30°	0.0274117	0.0180803	34.0%
lokal	0°	0.0198676	0.0116107	41.6%
lokal	30°	0.0257928	0.0163048	36.8%

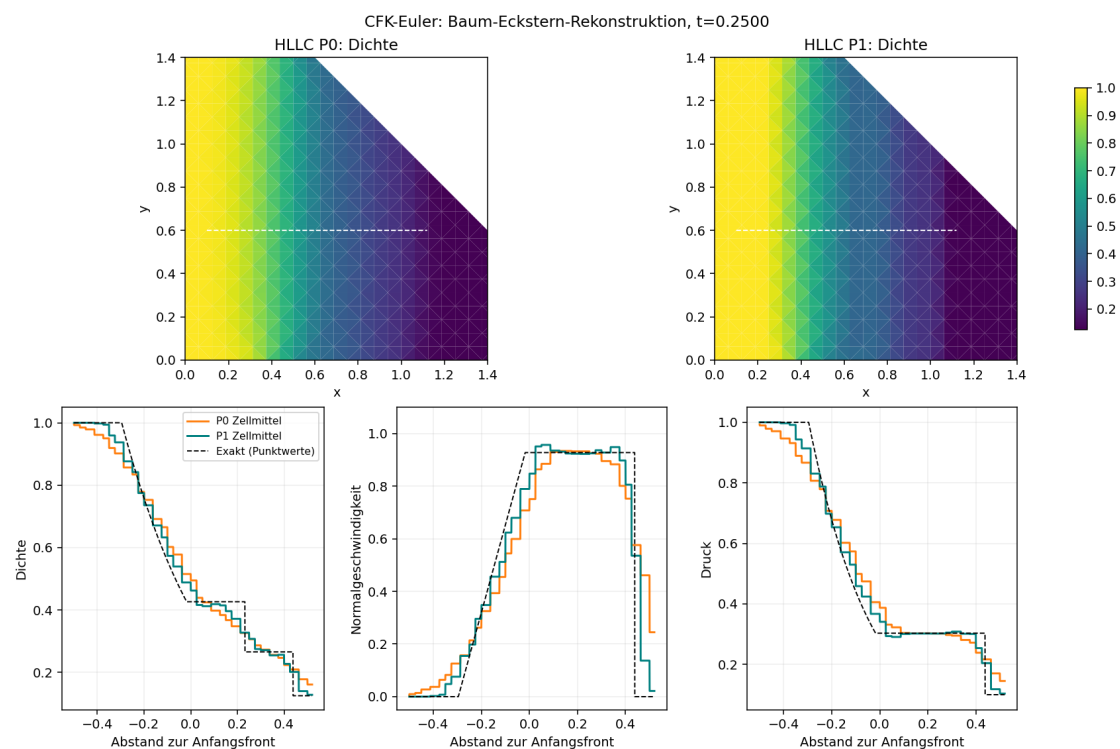


Abbildung 6.4.: Archivierter Sod-Vergleich der konstanten und linearen Rekonstruktion aus der längeren Animationsreihe bei $t = 0.25$. Die Referenzkurven erlauben, Frontlage, Kontakt und glatte Bereiche getrennt zu beurteilen. Die Fehlerwerte der Tabelle gehören dagegen zu $t = 0.15$.

gemeinsamen Faktor. Dieser negative Zwischenbefund gehört zur Entwicklungsgeschichte; er ist kein allgemeiner Gegenbeweis gegen gekoppelte oder charakteristische Limiter.

Der glatte Test transportierte bei konstantem Druck $p = 1$ das Profil

$$\rho(x, y, t) = 1 + 0.2 \sin(2\pi(x - 0.3t)) \sin(2\pi(y - 0.2t)), \quad \mathbf{v} = (0.3, 0.2). \quad (6.38)$$

Weil der Druck konstant und die Geschwindigkeit räumlich konstant ist, verschwindet die Impulsbeschleunigung; das Dichteprofil wird lediglich verschoben. Das ist eine exakte glatte Eulerlösung und prüft somit die Transportgenauigkeit ohne Schock. Auf den Tiefen 6, 8 und 10 ergaben sich für P1 die Fehler 0.0159737, 0.00586080 und 0.00226256. Die beobachteten Ordnungen sind damit ungefähr 1.45 und 1.37, nicht zwei. Auf dem größten Gitter war P1 sogar geringfügig schlechter als P0; auf dem feinsten reduzierte es den Fehler um etwa 67.6%. Der formale Ansatz zweiter Ordnung ist folglich nicht mit einem bereits nachgewiesenen asymptotischen Konvergenzbereich gleichzusetzen.

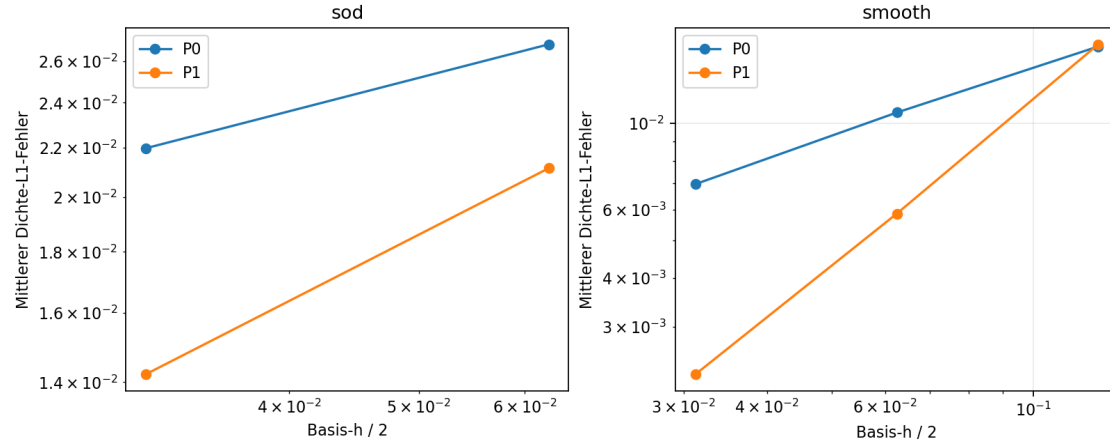


Abbildung 6.5.: Archivierter Genauigkeitsdiagnostik der Euler-Rekonstruktion. Gitterorientierung und Begrenzung beeinflussen die beobachteten Fehler; die Daten rechtfertigen keine pauschale Behauptung zweiter Ordnung.

Die Serie hatte einen maximalen Bilanzrest von $9.44 \cdot 10^{-15}$. Die kleinsten Werte $\rho \simeq 0.1249935$ und $p \simeq 0.0999927$ zeigen kleine Unterschreitungen der Ausgangsminima, aber keine negativen Zustände. Es gab keine Zustandsverwerfung, keinen HLLC-Ersatzfluss und keine zusätzlich aktive Positivitätsskalierung in diesen Produktionsläufen; 2082 Halbierungen erfolgten wegen der CFL-Prüfung der zweiten Stufe. Separate Einheits-tests aktivierten dagegen gezielt den Positivitätsbegrenzer. Eine in einem Lauf inaktive Schutzmassnahme ist nicht dadurch getestet, dass der Lauf erfolgreich war.

6.10. Echt zweidimensionale Belastungsproben

6.10.1. Kreisförmiger Drucksprung

Ein gedrehter Sod-Test prüft zwar die Gitterorientierung, bleibt aber eine ebene Welle. Die Reihe `Hydro_Radial_01` ergänzte deshalb einen kreisförmigen Drucksprung: innerhalb des Radius 0.12 gelten $(\rho, p) = (1, 1)$, ausserhalb $(0.125, 0.1)$, anfangs $\mathbf{v} = 0$. Das Zentrum liegt bei $(0.6, 0.6)$, die Endzeit bei 0.18. Wegen der radialen Divergenz ist dies *nicht* einfach der Sod-Test mit ersetzter Koordinate $x \mapsto r$. Es wird keine exakte Sod-Kurve als radiale Referenz ausgegeben.

6.10.2. Sedov–Taylor: Ähnlichkeit und Referenzprofil

Die zweite Belastungsprobe ist eine starke Explosion in einem zunächst ruhenden homogenen Medium. Für den zylindrischen idealisierten Grenzfall sei $\mathcal{E}$ die deponierte Energie pro Länge, ρ_0 die Volumendichte und der Anfangsdruck vernachlässigbar. Die Dimension von $\mathcal{E}/\rho_0$ ist L^4/T^2 . Ohne weitere Längenskala muss der Schockradius daher die Form

$$R(t) = \beta \left(\frac{\mathcal{E} t^2}{\rho_0} \right)^{1/4}, \quad \dot{R} = \frac{R}{2t} \quad (6.39)$$

haben. Der Exponent $1/2$ der Zeit gehört zur zylindrischen Geometrie; für eine sphärische dreidimensionale Explosion wäre er $2/5$.

Die Dimensionsanalyse bestimmt β noch nicht. Dazu setzen wir

$$x = \frac{r}{R}, \quad \rho = \rho_0 G(x), \quad v_r = \dot{R} V(x), \quad p = \rho_0 \dot{R}^2 P(x). \quad (6.40)$$

Für radiale glatte Strömung lauten die Gleichungen im Inneren des Schocks

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v_r) = 0, \quad (6.41)$$

$$\partial_t v_r + v_r \partial_r v_r + \rho^{-1} \partial_r p = 0, \quad (6.42)$$

$$(\partial_t + v_r \partial_r) \log(p/\rho^\gamma) = 0. \quad (6.43)$$

Die letzte Gleichung drückt die Entropieerhaltung entlang glatter Teilchenbahnen aus, nicht über den Schock hinweg. Mit $\partial_t x = -x \dot{R}/R$ und $\ddot{R}R/\dot{R}^2 = -1$ ergeben sich nach Kürzen gemeinsamer Faktoren die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(V - x)G' + G(V' + V/x) = 0, \quad (6.44)$$

$$(V - x)V' + P'/G - V = 0, \quad (6.45)$$

$$(V - x)(P'/P - \gamma G'/G) - 2 = 0. \quad (6.46)$$

Striche bezeichnen Ableitungen nach x . Am starken Schock bei $x = 1$ liefern die Sprungbedingungen

$$G(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad V(1) = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad P(1) = \frac{2}{\gamma + 1}. \quad (6.47)$$

Diese Anfangswerte werden nach innen integriert. Die Referenzroutine verwendet logarithmische Dichte und Druck und ergänzt den innersten Bereich durch die reguläre Asymptotik $G \propto x^{2/(\gamma-1)}$, $V \sim x/\gamma$ und endlichen Druck. Das vermeidet, eine numerische Division durch $r = 0$ vorzunehmen.

Schliesslich bestimmt die Energieerhaltung die Normierung:

$$\mathcal{E} = 2\pi\rho_0 R^2 \dot{R}^2 \int_0^1 \left[\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} G V^2 \right] x \, dx, \quad (6.48)$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{P}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} G V^2 \right] x \, dx, \quad \beta^4 = \frac{2}{\pi I}. \quad (6.49)$$

Damit ist nicht nur die Schockgeschwindigkeit, sondern auch das dimensionslose Dichte-, Geschwindigkeits- und Druckprofil festgelegt. Die Referenz ist eine numerische Auswertung einer selbstähnlichen Lösung, kein unabhängig durchgeführter hochaufgelöster Eulerlauf. Für $\gamma = 1.4$ ergab die Referenzprüfung $\beta^{-4} = 0.9840740169$; der Vergleichswert in Kamm und Timmes [16] ist 0.984041. Die relative Abweichung beträgt etwa $3.4 \cdot 10^{-5}$. Eine Verschärfung der ODE-Einstellungen änderte β um weniger als 10^{-7} ; diese interne Stabilität beseitigt nicht automatisch die verbleibende Abweichung zur publizierten Referenz.

6.10.3. Was die tatsächlichen Explosionsläufe prüfen

Die Rechnung startet nicht mit einer mathematischen Punktquelle. Sie verwendet $\rho_0 = 1$, $p_0 = 10^{-5}$, Energieüberschuss 0.1 in einer Scheibe mit Radius 0.06, $\gamma = 1.4$ und Endzeit 0.5. Kreis–Dreieck-Schnittflächen bestimmen die Anfangsmittelwerte; damit ist die deponierte Energie unabhängig von einer zufälligen Lage weniger Quadraturpunkte. Ein Kontrolllauf halbiert den Quellenradius auf 0.03. Endlicher Quellenradius und endlicher Umgebungsdruck sind aber echte Abweichungen vom idealisierten Ähnlichkeitsproblem. Eine kleinere Quelle ist deshalb zunächst ein Modellkontrolltest, nicht allein ein Gitterkonvergenztest.

Die 30 archivierten Läufe variierten Tiefe 10, 12 und 14, P0/P1, statische lokale Verfeinerung, Zentrums Lage, CFL-Zahl, Ausgaberastr und Quellenradius. Alle endeten erfolgreich. Der maximale Bilanzrest betrug $1.53 \cdot 10^{-14}$, die kleinsten Zustände lagen bei $\rho \simeq 0.015687$ und $p \simeq 9.9996 \cdot 10^{-6}$. Es gab 6795 zweite-Stufe-CFL-Halbierungen und 991882 Anwendungen der Positivitätsskalierung auf Zellrekonstruktionen. Letzteres zählt

Zellauswertungen, nicht verschiedene Zellen. Weder negative akzeptierte Zustände noch HLLC-Rückfälle wurden berichtet.

Zur Symmetrieprüfung werden Fronten entlang 128 Richtungen abgetastet. Die relative Streuung $(R_{\max} - R_{\min})/\langle R \rangle$ enthält auch den Effekt der dreieckigen, stückweise konstant abgetasteten Darstellung. Deshalb wird zusätzlich eine perfekte Kreisfront auf dasselbe Gitter projiziert und identisch gemessen. Bereits diese Kontrolle besitzt eine scheinbare Anisotropie. Sie ist eine Messkontrolle, kein einfach abzuziehender exakter Fehlerterm. Für Sedov/P1 sank die rohe Frontstreuung zwischen den uniformen Tiefen 10 und 14 von etwa 15.09% auf 4.43%; P0 erreichte auf Tiefe 14 etwa 4.27%. Ein höheres Rekonstruktionspolynom verbessert also nicht automatisch jede einzelne Symmetriekennzahl.

6.11. Zeitlich adaptive Gitter: ein eigener Validierungsschritt

Die Reihe `Hydro_AMR_01` führte erstmals Gitteränderungen während der Strömungsrechnung in dieser Testfolge ein. Drei Probleme wurden untersucht: eine glatt transportierte Dichtewolke, der kreisförmige Drucksprung und die Explosion. Feste grobe und feine Gitter wurden mit adaptiven Varianten bei maximaler Tiefe 12 beziehungsweise 14 verglichen; insgesamt wurden 24 Produktionsläufe archiviert.

Eine wichtige Namensunterscheidung betrifft die Ergebnisdateien: `adaptive_p0` und `adaptive_p1` bezeichnen hier den *Transfer* bei Verfeinerung. Der Euleroperator benutzt in beiden Fällen lineare Rekonstruktion. Die Wolke hat anfangs

$$\rho = 1 + 2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - (0.4, 0.5)|^2}{2(0.07)^2}\right), \quad p = 1, \quad \mathbf{v} = (0.5, 0.15), \quad (6.50)$$

und wird bis $t = 0.6$ transportiert. Auch hier ist die exakte Lösung eine Verschiebung des Anfangsprofils. Die Anfangsdaten werden nach der anfänglichen Gitteranpassung neu integriert; sie entstehen nicht durch unkontrolliertes Wiederverfeinern eines groben Anfangszustands.

Alle 24 Läufe erreichten ihr vorgesehenes Ende. Der maximale berichtete Bilanzrest war $3.21 \cdot 10^{-13}$; minimale Dichte und Druck blieben mit etwa 0.0418264 und $9.99617 \cdot 10^{-6}$ positiv. Die 9805 CFL-Halbierungen zeigen erneut, weshalb die zweite Stufe geprüft wird. Es gab keine Zustandsverwerfungen und keine wegen des Zellbudgets verworfenen Anpassungsblöcke. Daraus folgt nicht, dass jedes beliebige spätere Verfeinerungskriterium dieselben Eigenschaften besitzt.

Für den Vergleich mit einem festen feinen Gitter werden Zellmittelwerte konservativ auf eine gemeinsame Darstellung gebracht. Die Differenz zweier numerischer Lösungen ist dabei keine Differenz zu einer exakten Lösung. Besonders bei Explosionen müssen

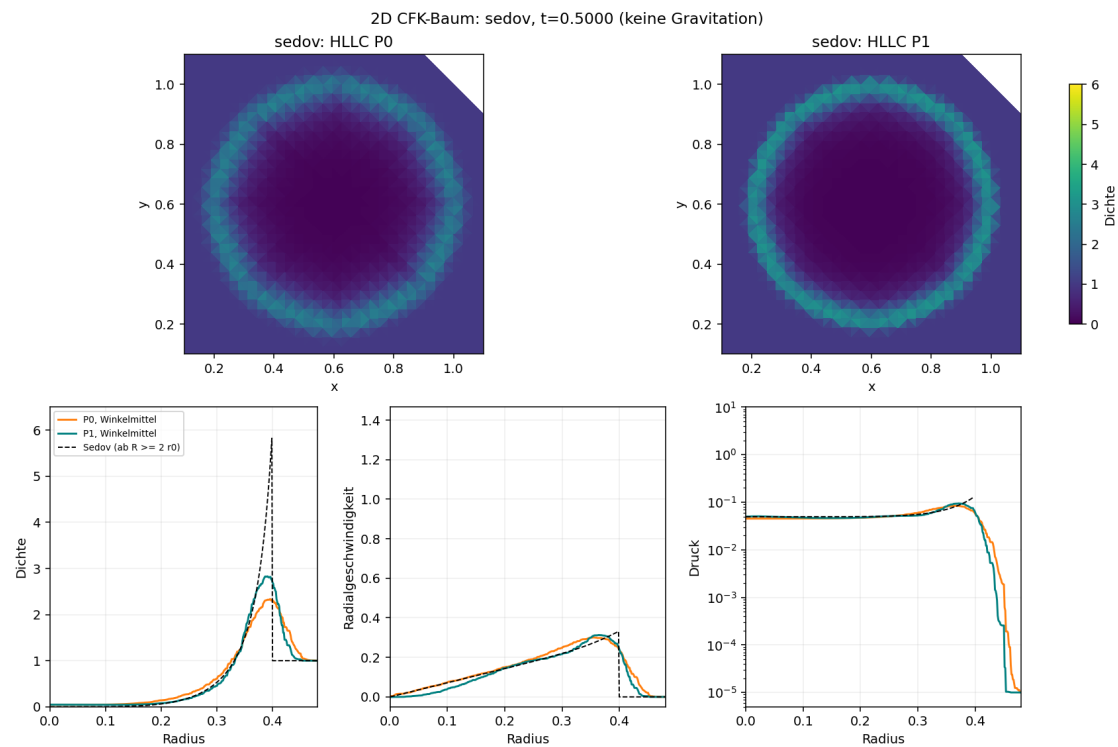


Abbildung 6.6.: Archivierter zweidimensionaler Sedov-Lauf mit radialer Diagnostik. Die selbstähnliche Punktquellenlösung ist eine wichtige, aber wegen der endlichen Anfangsquelle nicht exakt identische Referenz für die simulierten Anfangsbedingungen.

6. Finite Volumen auf dem Blattgitter

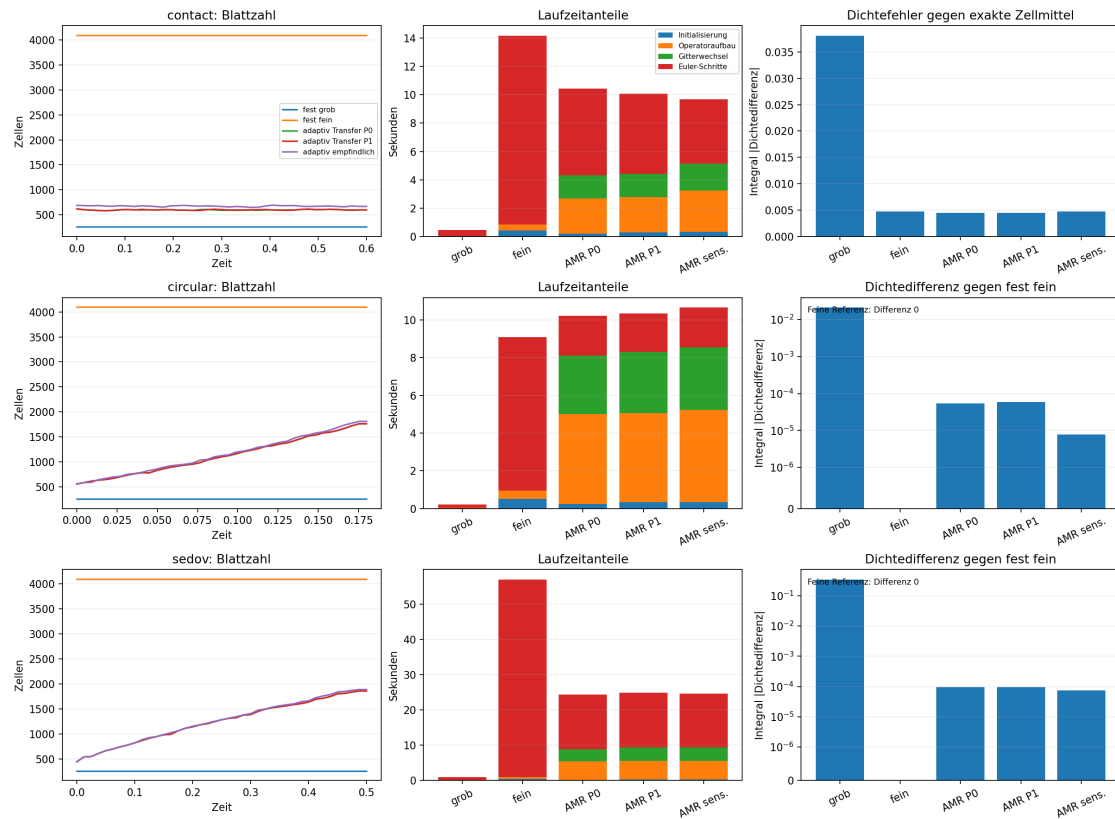


Abbildung 6.7.: Archivierte Diagnostik der adaptiven Testserie. Zellzahl, Fehler und Aufwand müssen gemeinsam beurteilt werden; ein feineres Maximum allein beschreibt nicht die tatsächlich eingesetzte Auflösung.

Quellenauflösung, Frontlage, Limiteraktivität und Zahl tatsächlich fein aufgelöster Zellen neben einem einzigen Fehlerwert betrachtet werden. Die historischen Läufe koppeln Anpassungstermine an Ausgabetermine; deren Änderung kann somit die numerische Lösung beeinflussen. Ausgaben sind hier nicht in jedem Fall eine rein nachgelagerte Darstellung.

6.12. Zusammenspiel der Operatoren

Der Baum liefert die Topologie, das Finite-Volumen-Verfahren die Bilanz und der Riemann-Löser die lokale Wellennäherung. Rekonstruktion, Zeitfortschritt und Rückweisung sind als zusammenhängender Pseudocode in Abschnitt C.5 aufgeführt; die konfliktfreie parallele Ausführung behandelt Kapitel 5.

6.13. Herkunft, Aussagegrenzen und Anschlussfragen

Für den Implementierungsabgleich sind relativ zum Projektverzeichnis CFK insbesondere folgende Dateien relevant:

- `CPP/src/hydro.cpp`: nativer HLLC-Fluss, Rekonstruktion, Zeitintegration, Transfer und Anpassungsindikatoren;
- `2D/euler_reconstruction.py`: Python-Rekonstruktion;
- `2D/vertex_stars.py`: topologische Ecksterne;
- `2D/euler_sod.py`: unabhängige planare Referenz samt Integration der konservativen Zellmittelwerte.

Der begleitende Prüfvermerk ordnet Quellen und historische Versuchsstände zu.

Herkunft und Beitrag: Bauer brachte die Rückfrage zur diffusen Schockdarstellung, die Erfahrung mit Roe aus der Diplomarbeit, die explizite Verwendung des Baums einschliesslich Ecknachbarn, den Sedov-Belastungstest und den Wunsch nach laufzeitadaptiver Verfeinerung ein. Die konkrete Auswahl und Ausarbeitung von HLLC, Least-Squares-Rekonstruktion, Begrenzerkombination, SSPRK2 und den gestaffelten Vergleichsreihen wurde im Dialog durch ChatGPT vorgeschlagen beziehungsweise implementiert. Die Literaturbezüge stehen an den jeweiligen Herleitungen.

Für das gesamte HLLC/RK/AMR-Verfahren liegt weder ein allgemeiner diskreter Entropiebeweis noch ein universeller Positivitätsbeweis vor. Die beschriebenen Stufenprüfungen

bleiben deshalb erforderlich; ein nachträglicher Druck-Floor würde das Verfahren verändern.

Die Genauigkeits- und 3D-Arbeitspakete sind in Kapitel 10 gebündelt. Zunächst behandelt Kapitel 7 die Kraft- und Energiequelle der Gravitation.

7. Selbstgravitation und hydrostatische Ruhe

7.1. Fragestellung und Modellentscheidung

Bei der Erweiterung um Gravitation wird Masse durch Kanten transportiert, Impuls durch Kräfte verändert und potentielle Energie in Gasenergie umgewandelt. Diese Vorgänge müssen zueinander passen. Zugleich sollte eine ruhende Wolke nicht allein durch die Diskretisierung in Bewegung geraten. Die folgenden Versuche untersuchen deshalb sowohl die globale Bilanz als auch die lokale Energieentwicklung.

7.1.1. Eine Massenschicht, keine zweidimensionale Kugel

Die simulierte Dichte ist die Flächenmassendichte $\Sigma(x, y)$. Druck P und Gasenergie E sind ebenfalls über die ausgelassene Richtung integriert. Das Kraftgesetz ist dagegen ein geglättetes dreidimensionales Newton-Gesetz zwischen Punkten der Ebene:

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_{\Omega} \frac{\Sigma(\mathbf{y})}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + \epsilon^2}} dA_y, \quad (7.1)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_{\Omega} \Sigma(\mathbf{y}) \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + \epsilon^2)^{3/2}} dA_y. \quad (7.2)$$

Die feste Plummer-Länge $\epsilon > 0$ gehört zum Modell. Sie verhindert die Punktsingularität, ist aber nicht ohne weitere Herleitung eine physikalische Scheibendicke. Die vertikale Mittelung wirklicher Scheiben ist eine eigene Modellierungsfrage [20]. Bei einer reinen Auflösungsstudie bleibt ϵ deshalb unverändert.

Eine strikt zweidimensionale Poisson-Gleichung hätte einen logarithmischen Fundamentalkern und wäre ein anderes Problem. Auch die in der dritten Richtung unendlich ausgedehnte zylindrische Gasverteilung wäre ein anderes Gravitationsmodell. Die zylindrische Sedov-Interpretation aus Kapitel 6 darf daher nicht ungeprüft auf dieses Kapitel übertragen werden. Die Ruheprofile enthalten weder Eigenrotation noch Zentralgestirn.

Die Gravitation wird isoliert berechnet, ohne periodische Kopien oder Spiegelmassen. Ein reflektierender *Hydro*-Rand kann trotzdem Gas einschliessen und Impuls übertragen.

Isolierte Gravitation bedeutet deshalb nicht automatisch randunabhängige Strömungsentwicklung.

7.2. Euler-Gleichungen mit Gravitationsquelle

Mit $\mathbf{m} = \Sigma \mathbf{v}$ und $q = E - |\mathbf{m}|^2/(2\Sigma) = P/(\gamma - 1)$ gilt

$$\partial_t \Sigma + \nabla \cdot \mathbf{m} = 0, \quad (7.3)$$

$$\partial_t \mathbf{m} + \nabla \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{v} + P\mathbf{I}) = \Sigma \mathbf{g}, \quad (7.4)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot [(E + P)\mathbf{v}] = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}. \quad (7.5)$$

Gravitation erzeugt keine Masse. Ihre Leistung ist Kraft mal Geschwindigkeit, also $\Sigma \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$ pro Fläche. Kompressionswärme und Schockheizung entstehen zusätzlich durch die Strömung; ein reiner Gravitationsquellschritt ist keine Wärmeleitung.

7.2.1. Die innere Energie als lokale Kontrollgrösse

Differentiation der Zustandsgleichung liefert für jede Änderungsrate

$$\dot{q} = \dot{E} - \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{m}} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \dot{\Sigma}. \quad (7.6)$$

Setzt man nur die Gravitationsquelle ein, sind $\dot{\Sigma} = 0$, $\dot{\mathbf{m}} = \Sigma \mathbf{g}$ und $\dot{E} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$. Damit folgt $\dot{q} = 0$. Diese Identität ist entscheidend: Eine unabhängig von der Impulsquelle veränderte Energiequelle kann künstlich lokal heizen oder kühlen, obwohl ihre globale Bilanz sehr gut ist.

7.2.2. Die kontinuierliche Gesamtenergiebilanz

Für den symmetrischen, zeitunabhängigen Potentialkern ist

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Sigma \Phi dA = -\frac{G}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{\Sigma(\mathbf{x}) \Sigma(\mathbf{y})}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + \epsilon^2}} dA_x dA_y. \quad (7.7)$$

Der Faktor 1/2 verhindert doppelte Paarzählung. Beide Dichtefaktoren ändern sich mit der Zeit; wegen der Symmetrie ergibt sich $\dot{W} = \int \Phi \partial_t \Sigma dA$. Kontinuitätsgleichung und partielle Integration liefern

$$\dot{W} = - \int_{\partial\Omega} \Phi \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} dA. \quad (7.8)$$

Der zweite Term kompensiert die Gasleistung. Folglich gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} E dA + W \right) = - \int_{\partial\Omega} [(E + P)\mathbf{v} + \Phi\mathbf{m}] \cdot \mathbf{n} ds. \quad (7.9)$$

Bei geschlossenen ruhenden Wänden verschwindet der Energieexport. Bei offenen Rändern ist eine Energieänderung im Gebiet nicht automatisch ein Erhaltungsfehler. Die Herleitung setzt voraus, dass das Potential aus der betrachteten Masse stammt; zusätzliche äussere Quellen verlangen eine erweiterte Bilanz.

7.3. Vom Gasgitter zum Kraftbaum

7.3.1. Zellmassen als Punktquadratur

Das Blatt K mit Fläche A_K und geometrischem Schwerpunkt $\mathbf{x}_K$ liefert die Masse $M_K = A_K \bar{\Sigma}_K$. Der vorhandene Kraftbaum übernimmt CFK-Blattcodes und Topologie. Innere Knoten aggregieren Masse und Massenschwerpunkt; diese Aggregate werden für veränderte Dichten erneuert. Die direkte Blattnäherung ist

$$\mathbf{g}_K = -G \sum_{J \neq K} M_J \frac{\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_J}{(|\mathbf{x}_K - \mathbf{x}_J|^2 + \epsilon^2)^{3/2}}. \quad (7.10)$$

Dies ist eine Punktquadratur, keine exakte Integration ausgedehnter Dreiecksmassen. Auch bei linearem Hydroansatz wird die Masse für die Kraft noch nicht als lineare Verteilung integriert.

Die Baumöffnung θ kontrolliert die Zusammenfassung ferner Gruppen. $\theta = 0$ entfernt den Baumapproximationsfehler durch direkte Blattwechselwirkungen, nicht den Fehler der Zellpunktquadratur. Gitterweite, Glättung und Baumöffnung müssen getrennt untersucht werden. Eine kleinere Öffnung ersetzt keine bessere Dichteauflösung.

7.3.2. Selbstkraft und diagonale Energie

Für den direkten Punktkern definieren wir

$$K_{IJ} = -\frac{G}{\sqrt{|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J|^2 + \epsilon^2}}. \quad (7.11)$$

Der diagonale Eintrag $K_{II} = -G/\epsilon$ liefert keine Selbstkraft, aber die Energie

$$W_{\text{diag}} = -\frac{G}{2\epsilon} \sum_I M_I^2. \quad (7.12)$$

Die erste Versuchsreihe liess diesen diagonalen Potentialterm weg; spätere Kontrollen schalteten ihn explizit ein. Beide Konventionen dürfen in einer Energiediagnose nicht vermischt werden. Auch bei festen Zellpositionen verändert Massentransport diesen Term.

Er ist nicht die exakte Selbstenergie einer homogenen Dreieckszelle; diese erforderte ein Doppel-Flächenintegral über dieselbe Zelle. Bei h vergleichbar mit ϵ kann die Näherung erheblich sein. Eine Änderung $\epsilon = \epsilon(h)$ wäre zudem eine andere Modellfolge. Direkte Paarwechselwirkungen besitzen antisymmetrische Kräfte und erhalten damit den inneren Gesamtimpuls. Ein zielweise geöffneter Baum erzwingt diese Paarantisymmetrie im Allgemeinen nicht exakt. Wandkräfte sind bei der Impulsprüfung nochmals getrennt zu berücksichtigen.

7.4. Untersuchte Quellenkopplungen

7.4.1. Zellarbeit und massenflussgekoppelte Arbeit

Die erste Variante ergänzt in beiden SSPRK2-Stufen die Quelle $(0, \Sigma \mathbf{g}, \mathbf{m} \cdot \mathbf{g})$. Sie passt lokal zur kontinuierlichen inneren Energie, kompensiert aber nicht automatisch die Potentialänderung durch den numerischen Massenfluss zwischen festen Zellzentren.

Die zweite Variante leitet die Energiequelle aus diesem Fluss ab. Sei f_{LR} die durch die Kante integrierte Massenrate, positiv von L nach R . Dann gilt $\dot{M}_L = -f_{LR}$ und $\dot{M}_R = f_{LR}$. Bei festem symmetrischem K ist

$$W_h = \frac{1}{2} \mathbf{M}^T K \mathbf{M}, \quad \Phi = K \mathbf{M}, \quad \dot{W}_h = \Phi^T \dot{\mathbf{M}}. \quad (7.13)$$

Die Kante trägt $f_{LR}(\Phi_R - \Phi_L)$ zur Potentialänderung bei. Ihre Gasleistung muss daher

$$w_{LR} = f_{LR}(\Phi_L - \Phi_R) \quad (7.14)$$

betragen. Der implementierte Ansatz gibt jeder der beiden Zellen die Hälfte dieser Leistung, geteilt durch ihre Fläche. Damit ist die globale Energieidentität für den direkten symmetrischen Kern auf festem Gitter *semidiskret* erfüllt.

Diese Aussage hat Grenzen. SSPRK2 erhält eine quadratische Invariante nicht automatisch bei endlichen Schritten exakt. Die Baumapproximation kann die Darstellung durch ein festes symmetrisches K verletzen. Vor allem legt die globale Bilanz die lokale Aufteilung nicht fest: Die hälftige Aufteilung erfüllt im Allgemeinen nicht $S_{E,K} = \mathbf{m}_K \cdot \mathbf{g}_K$. Somit wirkt

$$\dot{q}_{K,\text{grav}} = S_{E,K} - \mathbf{m}_K \cdot \mathbf{g}_K \quad (7.15)$$

als künstliche thermische Quelle oder Senke. Die Literatur untersucht konservative Gravitationskopplungen [19]; unser einfacher Ansatz ist nicht deren vollständiger Algorithmus.

7.4.2. Warum kleinere Schritte nicht immer helfen

Ein isolierter expliziter Euler-Quellschritt mit $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \tau \Sigma \mathbf{g}$ und $E' = E + \tau \mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$ ergibt

$$q' = q - \frac{1}{2} \tau^2 \Sigma |\mathbf{g}|^2. \quad (7.16)$$

Hier hilft ein kleinerer Schritt gegen einen zeitlichen Fehler. Eine bereits negative semidiscrete Rate $\dot{q}$ am Rand des zulässigen Bereichs ist anders: Kleinere Schritte approximieren dann zunächst nur genauer denselben problematischen Operator. Eine strengere CFL-Grenze ersetzt deshalb keine geeignete lokale Quellenkopplung.

7.4.3. Experimenteller Nachbarenergieaustausch

Eine diagnostische Gegenprobe überträgt Energie zwischen direkten Kantennachbarn. Ein unzulässiges RK-Stadium kann Energie von Nachbarn mit ausreichender thermischer Reserve erhalten. Geber verlieren genau den Empfängerbetrag; Masse und Impuls bleiben unverändert. Gemeinsam begrenzte Anfragen werden nach höchstens vier Durchgängen entweder vollständig akzeptiert oder verworfen; danach bleibt Schrittverkleinerung möglich. Diese Korrektur ist kein energieerzeugender Druckfloor, aber auch keine physikalisch hergeleitete Wärmeleitung. Sie blieb experimentell und wurde nicht mit dem folgenden Kick kombiniert.

7.4.4. Impulskonsistenter Kick

Im reinen Quellschritt bleiben Dichte und das daraus berechnete Feld konstant. Für Dauer τ kann dieser Teil exakt integriert werden:

$$\Sigma' = \Sigma, \quad \mathbf{m}' = \mathbf{m} + \tau \Sigma \mathbf{g}, \quad (7.17)$$

$$E' = q + \frac{|\mathbf{m}'|^2}{2\Sigma} = E + \tau \mathbf{m} \cdot \mathbf{g} + \frac{\tau^2}{2} \Sigma |\mathbf{g}|^2. \quad (7.18)$$

Der quadratische Term ist kinetische Energie, keine künstliche Wärme. Einsetzen ergibt $q' = q$ in exakter Arithmetik. Ein positiver Druck bleibt während dieses Teilschritts positiv. Bei extrem kleiner innerer gegenüber kinetischer Energie kann die Speicherung als Gesamtenergie dennoch Auslöschung verursachen; die Zulässigkeit wird weiter geprüft.

Ein voller Schritt kombiniert einen halben Kick, Hydrotransport ohne Gravitation und einen zweiten halben Kick mit neu berechnetem Feld:

$$U^{n+1} = \mathcal{G}_{\Delta t/2} \circ \mathcal{H}_{\Delta t} \circ \mathcal{G}_{\Delta t/2}(U^n). \quad (7.19)$$

Dies ist eine symmetrische Strang-Aufteilung [18]. Für lineare autonome Operatoren zeigt die Reihenentwicklung

$$e^{hA/2} e^{hB} e^{hA/2} = I + h(A + B) + \frac{1}{2}h^2(A + B)^2 + O(h^3),$$

weshalb der lokale Splittingfehler erst bei dritter Ordnung beginnt. Die nichtlineare Entsprechung verlangt glatte Flüsse und hinreichend genaue Teilintegrationen. Bei Schocks und Limiterwechseln folgt daraus keine pauschale gemessene zweite Ordnung.

Der Hydrooperator darf innerhalb eines äusseren Schritts kleinere CFL-Schritte ausführen. Zusätzlich gilt die Beschleunigungsskala

$$\Delta t \leq C_{\text{CFL}} \min_{K: |\mathbf{g}_K| > 0} \sqrt{\frac{\sqrt{A_K}}{|\mathbf{g}_K|}}. \quad (7.20)$$

Dimensionsmässig entspricht dies einer durch Beschleunigung zurückgelegten Strecke von der Grössenordnung einer Zelle, nicht einem bewiesenen lokalen Fehlerschätzer. Gescheiterte Versuche werden vom unveränderten akzeptierten Zustand mit kleinerem Schritt wiederholt; nach begrenzten Versuchen wird ein Fehler gemeldet.

Die Kickarbeit kompensiert nicht exakt die durch Hydro-Massentransport veränderte diskrete Potentialenergie. Robustere lokale Thermodynamik ist somit keine exakte globale Energieerhaltung. Auch hydrostatische Balance zwischen Druckfluss und Kraft entsteht nicht automatisch.

7.5. Hydrostatische Profile ohne Kugelschalentheorem

7.5.1. Abgrenzung zum Lane–Emden-Problem

Für eine ungeglättete sphärische Verteilung gelten $g_r = -GM(r)/r^2$ und $M'(r) = 4\pi r^2 \rho$. Diese lokale Beziehung zwischen eingeschlossener Masse und Kraft nutzt das Kugelschalentheorem. In unserer Scheibe tragen auch Ringe ausserhalb des Zielradius zum Feld bei. Weder die sphärische Lane–Emden-Gleichung noch das blosse Ersetzen ihrer radialen Geometriefaktoren löst daher das hier gewählte Integralmodell. Der alte Emden-Code war eine Anregung, nicht der numerische Kern des eigenständigen Scheibengenerators.

7.5.2. Dichte vorgeben und Druck integrieren

Der Generator wählt mit Konzentrationsparameter $a \geq 2$

$$\Sigma(r) = \Sigma_0[1 - r^2/R^2]_+^a, \quad \Sigma_0 = \frac{M(a+1)}{\pi R^2}, \quad (7.21)$$

wobei $[z]_+ = \max(z, 0)$. Mit $u = r^2/R^2$ folgt die Normierung $2\pi \int_0^R \Sigma r dr = \pi R^2 \Sigma_0 \int_0^1 (1-u)^a du = M$. Für ein Ziel auf der radialen Achse gilt

$$\Phi(r) = -G \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma(s)s}{D} d\varphi ds, \quad (7.22)$$

$$g_r(r) = -G \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\Sigma(s)s(r - s \cos \varphi)}{D^3} d\varphi ds, \quad (7.23)$$

$$D^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \varphi + \epsilon^2. \quad (7.24)$$

Der Faktor s stammt vom polaren Flächenelement; das Vorzeichen folgt aus $g_r = -d\Phi/dr$. Am Zentrum verschwindet die Kraft aus Symmetrie. Die ruhende Impulsgleichung verlangt

$$\frac{dP}{dr} = \Sigma g_r, \quad P(r) = P_{\text{ext}} + \int_r^R [-\Sigma(s)g_r(s)] ds. \quad (7.25)$$

Bei einwärts gerichteter Kraft ist $g_r < 0$ und der Druck nimmt nach aussen ab. Bestimmt wird der Druck zu einer gewählten Dichte, nicht die Dichte zu einer vorgeschriebenen Temperatur. Es folgen $q = P/(\gamma - 1)$ und $c^2 = \gamma P/\Sigma$; das Verhältnis P/Σ^γ darf radial variieren. Hydrostatik beweist weder radiale noch konvektive Stabilität.

Ein $P_{\text{ext}} > 0$ erfordert ein drucktragendes Aussenmedium. Die Versuche setzen $P_{\text{ext}} = 0$, ergänzen beim Export aber schwaches positives Hintergrundgas, weil der Hydrocode kein echtes Vakuum behandelt. Dieses Gas gehört nicht zum radialen Gleichgewicht.

7.5.3. Quadratur und Virialkontrolle

Gauss–Legendre-Quadratur integriert Radius und Winkel, mit doppeltem Gewicht für den symmetrischen Winkelbereich $[0, \pi]$. Die Ordnung wird verdoppelt, bis normierte Änderungen von Potential und Kraft klein genug sind. Die Druckquelle $-\Sigma g_r$ wird formtreu kubisch interpoliert und über ihre Stammfunktion integriert. Radiale Abtastung und Gravitationsquadratur sind getrennte Fehlerquellen.

Eine globale Kontrolle folgt aus Multiplikation von $\nabla P = \Sigma \mathbf{g}$ mit $\mathbf{x}$ und Integration. Wegen $\nabla \cdot (P\mathbf{x}) = 2P + \mathbf{x} \cdot \nabla P$ gilt für die Kreisscheibe

$$2 \int P dA + \int \Sigma r g_r dA - 2\pi R^2 P_{\text{ext}} = 0. \quad (7.26)$$

7. Selbstgravitation und hydrostatische Ruhe

Der Kraft-Virialterm ist bei Glättung nicht die potentielle Energie: seine symmetrisierte Paarform enthält $-G|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2/(2D^3)$ statt $-G/(2D)$. Erst für den ungeglätteten Newton-Kern stimmen beide überein. Weitere Tests prüfen Masse, Fernfeld, $g_r = -d\Phi/dr$ und Skalierung. Bei festem R, ϵ gilt $\Sigma \propto M$, $g \propto M$ und $P - P_{\text{ext}} \propto M^2$. Geänderte Masse bei unverändertem Druck erzeugt also nicht dieselbe Gleichgewichtssequenz.

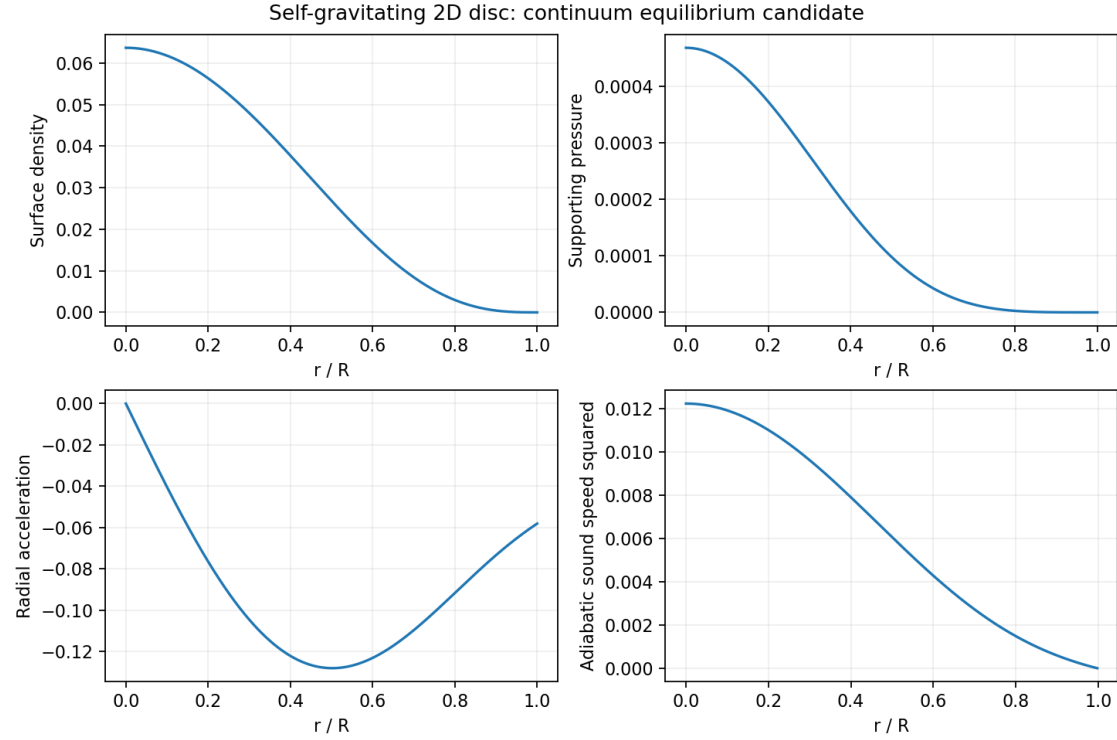


Abbildung 7.1.: Archiviertes Scheibenprofil mit abgestimmtem Druck und Gravitationsgrößen: ein kontinuierlicher Gleichgewichtskandidat des geglätteten Schichtmodells, kein Lane–Emden-Stern.

7.6. Kontinuierliches und diskretes Gleichgewicht

Ein kontinuierliches Profil erfüllt $\nabla P = \Sigma \mathbf{g}$. Auf dem Gitter müsste dagegen die zellweise Restkraft

$$\mathbf{R}_K = -\frac{1}{A_K} \sum_{f \in \partial K} |f| \hat{\mathbf{F}}_{m,f} + \bar{\Sigma}_K \mathbf{g}_K \quad (7.27)$$

verschwinden. Auch numerischer Massen- und Energiefluss müssten Ruhe erhalten. Punktquadratur, Zellprojektion, Rekonstruktion und Flusslöser approximieren verschiedene

Teile dieser Balance. Ihre Fehler heben sich nicht automatisch auf. Ein Rest erzeugt kurzzeitig ungefähr $\mathbf{v}_K \simeq t\mathbf{R}_K/\bar{\Sigma}_K$; kleine Dichte verstärkt die Wirkung einer gegebenen Restkraft.

Ein *well-balanced* Verfahren konstruiert Fluss und Quelle so, dass eine ausgewählte Klasse diskreter Gleichgewichte erhalten bleibt. Käppeli und Mishra [21] untersuchen diesen Ansatz für Euler-Gleichungen mit Gravitation. Die Übertragung auf unser nichtlokales Schichtpotential und CFK-Gitter ist eine offene Aufgabe. Ein besserer Riemann-Löser allein stellt diese Balance nicht her.

7.7. Versuchsfolge und negative Befunde

7.7.1. Erste Kopplung und Parameterstudien

Die Reihe `Hydro_Gravitation_01` prüfte Beschleunigung, Kraft und Potential gegen direkte Summen sowie die semidiskrete Energieidentität. Im Scheibentest mit 4096 Zellen senkte Kantenarbeit die normierte Energieabweichung von 3.47% auf 0.00900%. Der entsprechende grobe Fall mit 256 Zellen scheiterte aber am Zulässigkeitstest. Ein erfolgreicher feiner Film widerlegt dies nicht.

Die nächste Diagnose enthielt elf Varianten, sechs erfolgreich und fünf kontrolliert fehlgeschlagen. Danach untersuchte `Hydro_Gravitation_03` insgesamt 62 deterministische Konfigurationen mit variierter Auflösung, Glättung und Randlage. Dies war kein statistisches Ensemble identischer Zufallsversuche. Zwei Referenzen mit 8192 Zellen und Indikatorkontrollen folgten. Solche Studien motivieren Verfeinerungskriterien, liefern aber noch keinen universellen lokalen Fehlerschätzer. Insbesondere ist h/ϵ auf uniformen Gittern überall gleich und entscheidet dort nicht, wo lokal verfeinert werden sollte.

7.7.2. Der druckarme Rand als isolierter Fehlerfall

Das neue Profil verwendete $M = 0.002$, $R = 0.2$, $\epsilon = 0.024$, $G = 1$, $\gamma = 5/3$ und $a = 3$. Die kontinuierliche Kontrolle mit 513 Radialpunkten meldete eine letzte normierte Kraftänderung von $1.53 \cdot 10^{-13}$, einen relativen Massenrest von $-1.94 \cdot 10^{-11}$ und Virialrest $3.49 \cdot 10^{-10}$. Dies sind Konsistenzdiagnosen, keine strengen Gesamtfehlerschranken.

Der Export integrierte konservative Zellmittel und ergänzte Hintergrundgas mit Gesamtmasse $1.27324 \cdot 10^{-7}$. Die alte Massenflusskopplung scheiterte auf 1024 Zellen bei $t = 0.0939316$. Direkte Gravitation mit $\theta = 0$ scheiterte praktisch gleichzeitig, P0-Rekonstruktion bereits bei $t = 0.0255095$. Eine maximale Schrittweite 10^{-4} beseitigte

den Fehler ebenfalls nicht. Zellarbeit und eine Gegenprobe ohne Gravitation erreichten $t = 0.1$; letztere ist ausdrücklich kein Gleichgewichtstest.

Im letzten zulässigen Zustand der Zelle mit Code 2019 war $q = 4.87 \cdot 10^{-16}$ noch positiv. Gleichung (7.6) ergab

$$\begin{aligned}\dot{q}_{\text{Hydro}} &= +4.0372 \cdot 10^{-9}, \\ \dot{q}_{\text{Gravitation}} &= -1.9558 \cdot 10^{-8}, \\ \dot{q}_{\text{gesamt}} &= -1.5520 \cdot 10^{-8}.\end{aligned}$$

Für diesen konkreten Fehler war somit eine künstliche thermische Senke des gekoppelten Operators nachgewiesen, nicht ein entscheidender Baumapproximationsfehler. Ein Steigungsbegrenzer schützt rekonstruierte Zustände, aber nicht automatisch diese Quellenrate.

Die normierte globale Energieänderung betrug gleichzeitig nur $-4.08 \cdot 10^{-9}$, bei kleinerem Schritt sogar $+3.52 \cdot 10^{-12}$. Zellarbeit erreichte die Zielzeit mit etwa 0.566% Energieänderung. Die Endzeiten sind verschieden; dies ist kein gleichzeitiger Genauigkeitsvergleich. Der Gegensatz zeigt dennoch, warum lokale Zulässigkeit und globale Energie getrennt geprüft werden müssen.

7.7.3. Austausch und Kick als Gegenproben

Der experimentelle Nachbarenergieaustausch brachte den groben Lauf bis $t = 0.1$ mit einem Transfer von $2.65 \cdot 10^{-8}$ der anfänglichen thermischen Energie. Die längere Probe scheiterte dennoch bei $t = 0.243148$. Auf 4096 Zellen erreichte sie $t = 0.5$, benötigte aber in 50 von 69 Schritten einen Austausch. Kleine globale Transfermenge bedeutete also nicht seltenen oder lokal unwichtigen Eingriff.

Die Kickvariante erreichte mit demselben Profil auf 1024 und 4096 Zellen $t = 0.5$ ohne Floors und ohne Austausch. Die normierte Energieänderung betrug allerdings etwa 2.66% beziehungsweise 0.487%: Robustheit ist nicht gleich Genauigkeit. Eine zusätzliche Zeitverfeinerung im kurzen groben Lauf verbesserte die Energiebilanz kaum und deutete dort auf einen dominanten räumlichen Beitrag hin.

7.8. Abgeschlossene längere Ruheläufe

Die Serie `Scheiben_Ruhelaufe_02` lief auf schmalzberg mit vier Threads und 16384 beziehungsweise 65536 Zellen bis $t = 2$. Die Kraftrechnung verwendete $\theta = 0.3$, der Hydro-Teilschritt HLLC mit P1-Rekonstruktion und CFL-Zahl 0.4. Zentrum war $(0.6, 0.6)$ im

reflektierenden Wurzeldreieck; Eigenrotation und Zentralmasse fehlen. Für die Profilparameter ist

$$t_{\text{dyn}} = \sqrt{R^3/(GM)} = 2. \quad (7.28)$$

Dies ist eine charakteristische Skala, keine exakt berechnete Eigenperiode der geglätteten Scheibe. Eine solche dynamische Zeit ist noch kein Langzeitstabilitätsnachweis.

7.8.1. Definition der Diagnosen

Dichteänderung, Bewegungsenergie und normierte Energieänderung sind

$$D_{\Sigma}(t) = \frac{\sum_K A_K |\bar{\Sigma}_K(t) - \bar{\Sigma}_K(0)|}{M(0)}, \quad (7.29)$$

$$T(t) = \sum_K A_K \frac{|\mathbf{m}_K|^2}{2\Sigma_K}, \quad Q(0) = \sum_K A_K q_K(0), \quad (7.30)$$

$$\delta\mathcal{E}(t) = \frac{E_{\text{gas}}(t) + W_h(t) - E_{\text{gas}}(0) - W_h(0)}{|E_{\text{gas}}(0)| + |W_h(0)|}. \quad (7.31)$$

Die Normierung vermeidet einen nahezu verschwindenden Nenner durch Kompensation positiver Gas- und negativer Bindungsenergie. D_{Σ} misst Änderung gegenüber dem Anfang, nicht Fehler gegen eine bekannte exakte zeitabhängige Lösung. Der Solverwert `max_balance` prüft dagegen Gasbilanz einschliesslich verbuchter Quellen; er ersetzt $\delta\mathcal{E}$ nicht. Zum Randband gehören hier Zellen, deren Schwerpunkt weniger als 0.1 von einer Randgeraden entfernt ist. Sein Massenanteil ist eine geometrische Diagnose, kein direkter Nachweis einer Wellenreflexion. Die nativen Zeiten in der Tabelle enthalten nicht alle Vorbereitungs- und Auswertungsschritte und sind kein isolierter Skalierungsbenchmark.

Tabelle 7.1.: Ruheläufe bei $t = 2$. Prozentwerte sind ausdrücklich markiert. Quelle: gesicherte Auswertung der Serie `Scheiben_Ruhelaefue_02`.

Grösse	16384 Zellen	65536 Zellen
D_{Σ}	1.9697%	0.6939%
$T/Q(0)$	0.006227%	0.0007443%
$\delta\mathcal{E}$, Diagnose $\theta = 0.15$	0.17254%	0.011485%
Randband-Massenanteil	0.001936%	0.001896%
Relative Massendrift	$1.79 \cdot 10^{-13}$	$1.53 \cdot 10^{-13}$
Äussere Schritte	329	646
Native Rechenzeit	115.6 s	1299.1 s

Vierfache Zellzahl halbiert hier die charakteristische Länge. Die Dichteänderung sinkt um Faktor 2.84, die Bewegungsenergie um Faktor 8.37. Dies stützt einen wesentlichen

räumlichen Beitrag zur unerwünschten Bewegung. Zwei Gitter mit adaptiven Schritten und approximativer Gravitation ergeben aber keine gesicherte Ordnung.

Die Energiediagnose verwendet ein Baumpotential mit Öffnung 0.15 einschliesslich diagonalen Punktquadraturenergie. Eine zusätzliche Anfangs-/Endkontrolle mit $\theta = 0.075$ ergibt 0.172544% und 0.0114794%. Die Übereinstimmung ist eine Öffnungskontrolle, keine direkte Paarenergie oder rigorose Fehlerschranke. Die minimalen Drücke aller Abschnitte bleiben bei $3.40 \cdot 10^{-10}$ und $3.68 \cdot 10^{-10}$ positiv.

7.8.2. Vergleich und Datenkontinuität

Vier feine Nachfahren eines groben Blatts werden durch zwei entfernte Kindbits zugeordnet und konservativ restringiert:

$$\bar{U}_K^{\text{restr}} = \frac{1}{A_K} \sum_{k \subset K} A_k \bar{U}_k. \quad (7.32)$$

Die Zuordnung hängt nicht von der Arrayreihenfolge ab. Bei $t = 2$ beträgt die normierte Dichtedifferenz beider Rechnungen etwa 1.511%. Das ist eine Differenz numerischer Lösungen, nicht deren jeweiliger Fehler gegen eine exakte Lösung.

Die archivierte Auswertung prüfte Checkpoint-Hashes, alle 20 Abschnittseingänge und -ausgänge beider Läufe sowie die Anschlusskette. Der Solver ist durch SHA-256 identifiziert. Diese Prüfungen sichern die Datenzuordnung, nicht die physikalische Richtigkeit. Für dieses Kapitel wurden die gesicherten Auswertungen benutzt, keine neuen Simulationen gestartet.

7.9. Kollisionen und die Grenzen einer Demonstration

Die Kollisionsfilme entstanden mit der älteren Kopplung und nicht hydrostatisch abgestimmten Wolken. Sie sind kein Belastungstest der späteren Kick-Ruheprofile. Der erste kompakte Versuch scheiterte bei $t = 0.033134$ an unzulässigem Druck. Die erfolgreiche Folgedemonstration änderte mehrere Parameter, unter anderem Dichte und Glättung, und isoliert daher nicht den Einfluss einer einzelnen Änderung.

Der verlängerte Vergleich benutzte 6594 Zellen mit maximaler Tiefe 18 und 35714 Zellen mit Tiefe 21. Drei zusätzliche binäre Ebenen verringern die feinste Längenskala um $\sqrt{8}$, nicht um acht. Der grobe Lauf erreichte $t = 2$. Der feine wurde im Abschnitt 0.25 bis 0.30 durch das Zeitbudget beendet; letzter vollständiger Zustand ist $t = 0.25$. Der technische Status `failed` bezeichnet hier einen Timeout, keinen nachgewiesenen numerischen Druckfehler.

7. Selbstgravitation und hydrostatische Ruhe

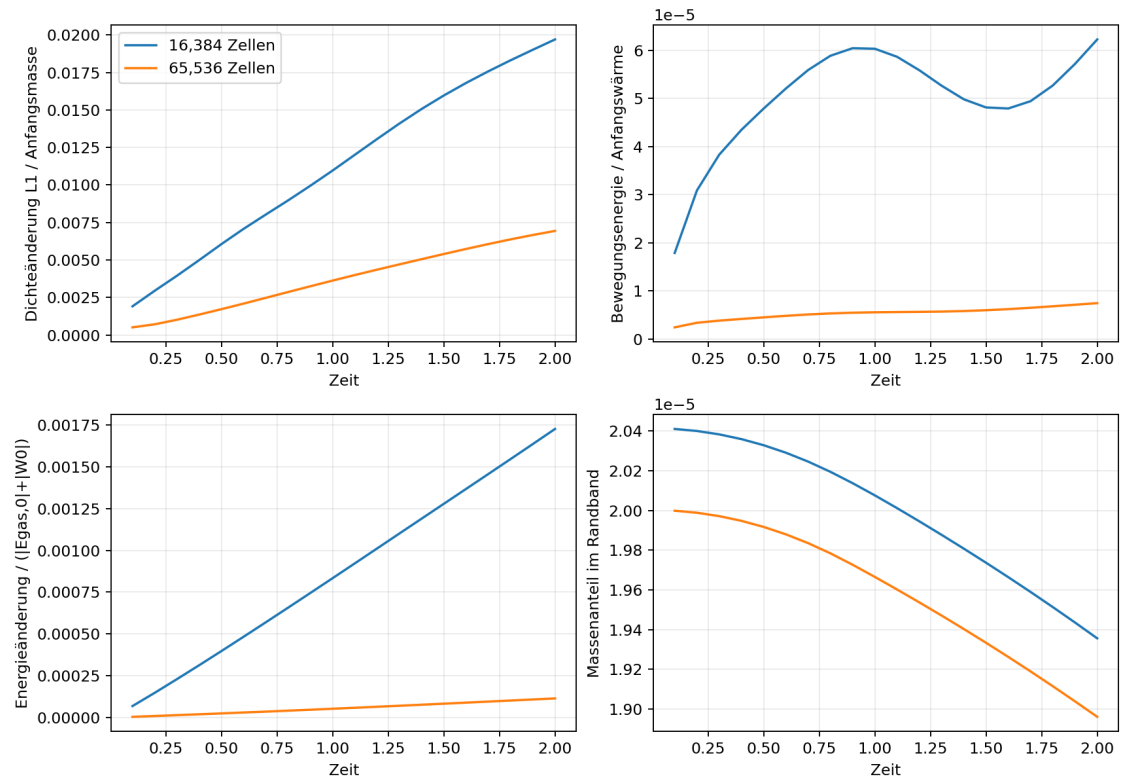


Abbildung 7.2.: Archivierte Ruheentwicklung über eine dynamische Zeit. Die feinere Rechnung ist ruhiger, aber nicht exakt stationär. Bewegungsenergie und globale Energieänderung bleiben getrennte Diagnosen.

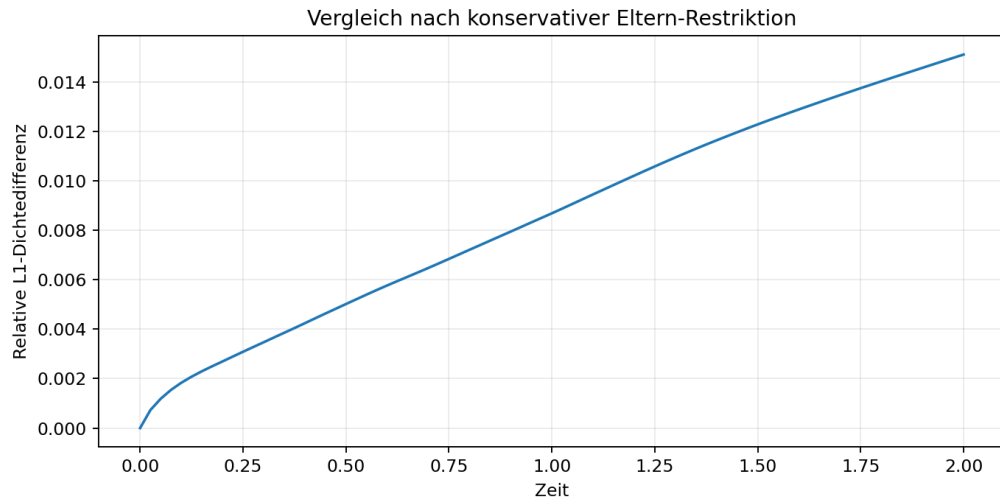


Abbildung 7.3.: Konservativer Vergleich der Ruheläufe zu gemeinsamen Zeiten. Integer-Vorfahren liefern die Zuordnung zwischen den Gittern.

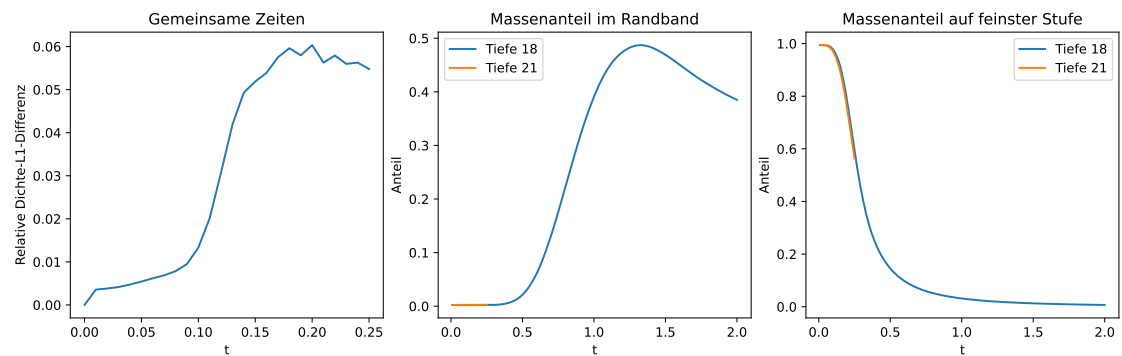


Abbildung 7.4.: Kollisionsvergleich: Nur der gemeinsame Zeitraum bis $t = 0.25$ erlaubt den direkten Auflösungsvergleich. Die längere grobe Entwicklung ersetzt nicht den fehlenden feinen Lauf.

Über 26 gemeinsame Ausgabezeiten wurde auf die groben Integer-Vorfahren restringiert. Die Dichtedifferenz am gemeinsamen Ende beträgt 5.48%. Dort liegen im feinen Lauf 56.33% der Masse auf der feinsten Stufe. Am Ende des langen groben Laufs sind es nur 0.678%; zugleich liegen 38.50% der Masse im Randband. Die späte Entwicklung ist daher weder durchgehend fein aufgelöst noch als randunabhängige Kollision ausgewiesen.

7.10. Implementierung, offene Schritte und Herkunft

Die native Implementierung liegt in `CPP/src/hydro.cpp`. Ihre zentralen Routinen heissen `self_gravity`, `gravity_kick` und `split_gravity`.

`CPP/python/equilibrium_disc.py` erzeugt die Profile; `long_disc_rest.py` organisiert die langen Ruheläufe. Die Kickoption ist experimentell, nicht automatisch Standard. Sie schliesst Nachbarenergieaustausch aus; Potentialoptionen der alten Kantenarbeit müssen abgeschaltet sein. Eine unabhängige Energiediagnose darf dennoch das Potential auswerten.

Der Kick ist parallel, zelllokal und $O(N)$. Die Produktion benutzt den Kraftbaum, keine quadratische direkte Paarsumme. Letztere bleibt kleinen Kontrollfällen vorbehalten. Wiederverwendbare Arbeitsbereiche sind vor grossen Rechnungen sinnvoll, weil der Splitprototyp den Hydrointegrator für Teilintervalle erneut aufruft. Aus den vorliegenden Läufen folgt keine Leistungsgarantie für etwa 400000 Zellen.

Gravitation und dynamische AMR werden derzeit ausdrücklich nicht kombiniert. Konservativer Transfer erhält zwar Masse, Impuls und Gasenergie, aber geänderte Zellquadratur kann die diskrete Potentialenergie springen lassen. Diese Änderung muss gesondert kontrolliert werden; Hydro-Konservativität ist nicht automatisch Erhaltung der gesamten mechanischen Energie.

Die Quellen-Drucksenke bleibt ein verpflichtender Regressionstest für weitere Kopplungen. Die daraus folgenden Arbeitspakete und ihre Priorisierung behandelt Kapitel 10.

Herkunft und Beitrag: Bauer formulierte das Ziel selbstgravitierenden Gases, schlug Lane–Emden- und Ruhetests vor, vermutete Auflösungs- und Randeinflüsse und wünschte kompakte Kollisionen sowie Einschlagsdemonstrationen. Integral-Profilkonstruktion, Diagnoseplan und experimentelle Kopplungen wurden im Dialog durch ChatGPT vorgeschlagen und nach Zustimmung implementiert.

8. Versuchsregister und Aussagekraft

8.1. Was die Versuche nachweisen sollen

Die vorangehenden Kapitel erklären Verfahren und einzelne Ergebnisse. Hier werden die Nachweise zusammengeführt: Welche Frage wurde mit welchem Vergleich beantwortet, welche Änderung folgte daraus, und was bleibt offen? Das Register ist eine Synthese der archivierten Entwicklungsstände, keine Behauptung, sämtliche historischen Prüfungen seien mit der heute vorliegenden Programmversion erneut ausgeführt worden.

8.1.1. Vier Arten von Evidenz

Ein mathematischer Satz, eine erfolgreiche Programmausführung und ein überzeugender Film sind nicht gleichartige Nachweise. Wir unterscheiden:

1. **Mathematische Eigenschaften.** Eine Herleitung zeigt unter expliziten Voraussetzungen beispielsweise die Flächenzerlegung oder die Konservativität eines gemeinsamen Kantenflusses. Sie beweist nicht, dass die Implementierung diese Voraussetzungen erfüllt.
2. **Implementierungsverifikation.** Referenzvergleiche, Invarianten und konstruierte Grenzfälle prüfen, ob der Code das spezifizierte Verfahren ausführt. Zwei Programme können allerdings denselben konzeptionellen Fehler teilen.
3. **Numerische Modellprüfung.** Analytische Lösungen und kontrollierte Auflösungsstudien untersuchen die Approximation eines festgelegten mathematischen Problems.
4. **Physikalische Validierung.** Beobachtungen oder Experimente müssten zusätzlich zeigen, ob das Modell einen realen Vorgang angemessen beschreibt. Ein solcher Nachweis liegt für die hier gezeigten selbstgravitierenden Scheiben und Kollisionen nicht vor.

Die folgenden Untersuchungen betreffen vorwiegend die ersten drei Ebenen.

8.1.2. Prüfvertrag und Bewertung

Ein Versuch benötigt neben den technischen Angaben des Manifests (Anhang B) eine Referenz, eine Messgrösse und ein Akzeptanzkriterium. Die zugehörigen Eingaben stehen in den Berichtsarchiven.

Ein Regressionstest kann vorab eine Toleranz für jede Zustandskomponente festlegen. Eine explorative Studie untersucht dagegen erst, wie Fehler oder Kosten auf Parameteränderungen reagieren. Für viele Entwicklungsreihen existiert kein dokumentierter, vorab festgelegter Grenzwert der physikalischen Genauigkeit. Nachträglich wird deshalb kein solcher Grenzwert erfunden. *Erfolgreich abgeschlossen* bedeutet zunächst nur, dass die gewünschte Endzeit ohne gemeldeten numerischen Fehler erreicht wurde.

8.2. Messgrössen und faire Vergleiche

8.2.1. Bilanzrest und Lösungsfehler

Für eine konservierte Komponente sei $Q_h(t) = \sum_K A_K \bar{U}_K(t)$ und $B_h(t)$ der zeitlich integrierte, nach aussen gerichtete numerische Randfluss. Ohne Quellen sollte

$$R_Q(t) = Q_h(t) - Q_h(0) + B_h(t) \quad (8.1)$$

bis auf Rundung verschwinden. Mit einer Quelle muss zusätzlich deren diskretes Zeitintegral abgezogen werden. Verwendet werden die tatsächlich berechneten numerischen Flüsse, nicht eine nachträglich anders approximierten Randintegration. Ein kleiner Rest bestätigt die Buchführung. Auch eine stark verschmierte Schockfront kann Masse nahezu exakt bilanzieren.

Für eine verfügbare Referenzlösung ist deshalb zusätzlich etwa

$$E_1(t) = \sum_K A_K \left| \bar{\rho}_K(t) - \bar{\rho}_K^{\text{ref}}(t) \right| \quad (8.2)$$

zu bestimmen. Der Referenzwert ist möglichst derselbe Zellmittelwert, nicht bloss der Punktwert im Zentrum. Ein flächengemittelter Fehler $E_1/|\Omega|$ und ein relativer Fehler E_1/M besitzen andere Normierungen. Die Sod-Tabellen in Kapitel 6 verwenden nicht überall dieselbe Normierung; ihre Zahlen dürfen nicht ohne Umrechnung zu einer einzigen Rangliste zusammengezogen werden.

8.2.2. Gittervergleich und beobachtete Ordnung

Bei hierarchisch ineinander enthaltenen Gittern erfolgt der Vergleich durch konservative Restriktion:

$$(\mathcal{R}U^f)_K = \frac{1}{A_K} \sum_{J \subset K} A_J U_J^f, \quad D_{cf} = \frac{\sum_K A_K |\rho_K^c - (\mathcal{R}\rho^f)_K|}{M_0}. \quad (8.3)$$

Die Präfixrelation der Integercodes liefert die Zuordnung. Gemessen wird der Unterschied der beiden Rechnungen, nicht ihre Entfernung zur exakten Lösung. Restriktion entfernt zudem Strukturen, die das grobe Gitter nicht darstellen kann. Bilder der feinen Lösung ergänzen deshalb die gemeinsame Norm.

Für Fehler gegen dieselbe Referenz auf vergleichbaren Gittern lautet eine beobachtete Ordnung

$$p_{\text{obs}} = \frac{\log(E(h)/E(h/r))}{\log r}. \quad (8.4)$$

Bei uniformer binärer Verfeinerung halbieren zwei zusätzliche Baumstufen die charakteristische Zelllänge; dann ist $r = 2$. Eine einzelne Stufe entspricht in der Flächenskala dagegen $r = \sqrt{2}$. Für adaptive Gitter definiert die maximale Tiefe allein keine globale Gitterweite. Zwei Werte liefern einen Quotienten, aber keinen gesicherten asymptotischen Bereich. Zeitfehler, Quellenregularisierung, Begrenzer und Baumöffnung können ihn ebenfalls beeinflussen.

8.2.3. Reproduzierbarkeit und Laufzeit

Bitweise Gleichheit ist ein starkes Regressionskriterium innerhalb der geprüften Umgebung. Rechnerübergreifend werden dokumentierte numerische Toleranzen benötigt. Weder identische Hashes noch kleine Differenzen zum Pythonprogramm ersetzen einen unabhängigen Physiktest. Technische Wiederholungen derselben Eingabe sind ausserdem keine unabhängigen Zufallsrealisierungen. Der Beschleunigungsfaktor $S_q = T_1/T_q$ ist nur sinnvoll, wenn beide Zeiten denselben Arbeitsumfang abdecken. Initialisierung, Ausgabe, Diagnostik und Topologiearbeit müssen entweder enthalten oder ausdrücklich ausgeschlossen sein.

8.3. Chronologisches Register

Die Kennungen V1–V8 gliedern dieses Kapitel; sie ersetzen nicht die historischen Verzeichnisnamen. Die Reihenfolge folgt den fachlichen Entwicklungsschritten und behauptet keine minutengenaue Chronologie.

Jede Prüfstation verbindet eine Leitfrage mit einem Befund und seiner Aussagegrenze. Ausgewählte Abbildungen aus den Fachkapiteln erleichtern die vergleichende Lektüre des Registers.

8.3.1. V1: Adressgeometrie und Konformität

Frage und Ziel. Können Geometrie, Nachbarn und Abschluss aus den Adressen gewonnen werden, ohne die definierte Triangulation zu verändern?

Prüfung. Kapitel 2 entwickelt Kind-, Präfix- und Nachbarrelationen. Geometrische Referenzen und Invarianten prüfen Orientierung, vollständige Zerlegung, reziproke Kantenbeziehungen und das Fehlen hängender Knoten. Minimalität des Abschlusses gilt nur innerhalb der festen Hierarchie, nicht unter allen möglichen Triangulationen.

Befund und Grenze. Die Strukturserien liefern konkrete Kontrollgitter: In G2 bestanden 1700 Bäume die leichten Prüfungen; 68 kleine Kontrollbäume wurden zusätzlich vollständig geprüft. Daraus folgen nicht 1700 vollständige geometrische Verifikationen. Ein korrekter Nachbarcode garantiert zudem keinen korrekten Cache nach einer späteren Gitteränderung. Satz, Implementierung und Cachepflege bleiben verschiedene Verantwortungsebenen.

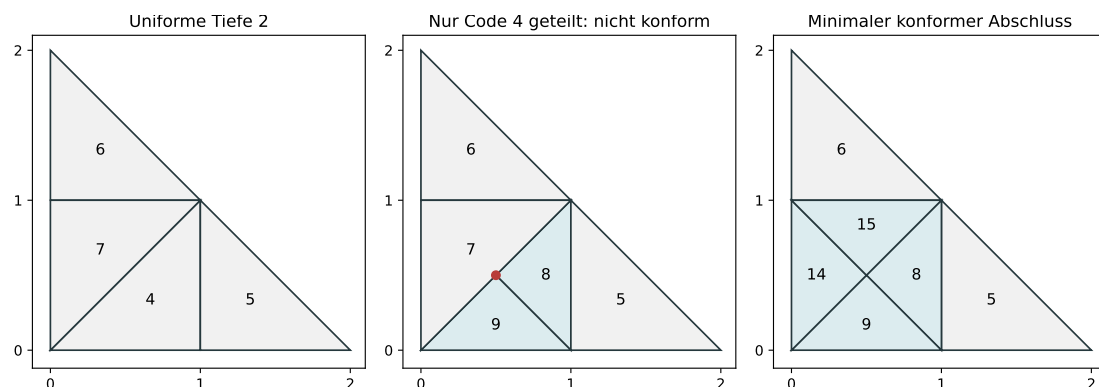


Abbildung 8.1.: V1: Was eine Konformitätsprüfung erkennen muss. Die alleinige Teilung von Blatt 4 erzeugt einen hängenden Knoten (Mitte); erst die zusätzliche Teilung von Blatt 7 beseitigt ihn (rechts). Eine korrekte Gesamtfläche allein würde diesen Fehler nicht entdecken. Geometrisches Beispiel aus der exakten Referenz, erneut aus Kapitel 2; kein statistischer Nachweis für alle Bäume.

8.3.2. V2: Statistische Gitterstruktur

Frage und Ziel. Wie hängen Blattzahl, Tiefe und Aufbauaufwand von Punktzahl, Konzentration und Lage einer Wolke ab?

Prüfung. Kapitel 3 behandelt uniforme, gaussförmige und Mehrclusterverteilungen. G2 verschiebt dieselben realisierten Wolken gepaart; der Lageeffekt wird dadurch nicht mit neu gezogenen Zufallspunkten vermischt. G1 untersucht die Konzentration.

Befund. Bei einer Million Punkten führt die Halbierung der Gaussbreite im untersuchten Bereich ungefähr zu zwei zusätzlichen mittleren besetzten Ebenen. In G2 beträgt die Spannweite der Zentrenmittel bei 10^5 Punkten etwa 0.425%. Für eine einzelne kleine Wolke entstehen jedoch 70 beziehungsweise 153 Blätter. Der Quotient $153/70 > 2$ widerlegt eine universelle punktweise Faktor-zwei-Schranke.

Diskussion. Dieses Gegenbeispiel widerlegt keine entsprechende Aussage über Erwartungswerte. Statistik und exakte Gegenbeispiele beantworten unterschiedliche Fragen. Blattzahl allein beschreibt zudem die tatsächlich erreichte räumliche Auflösung nicht ausreichend.

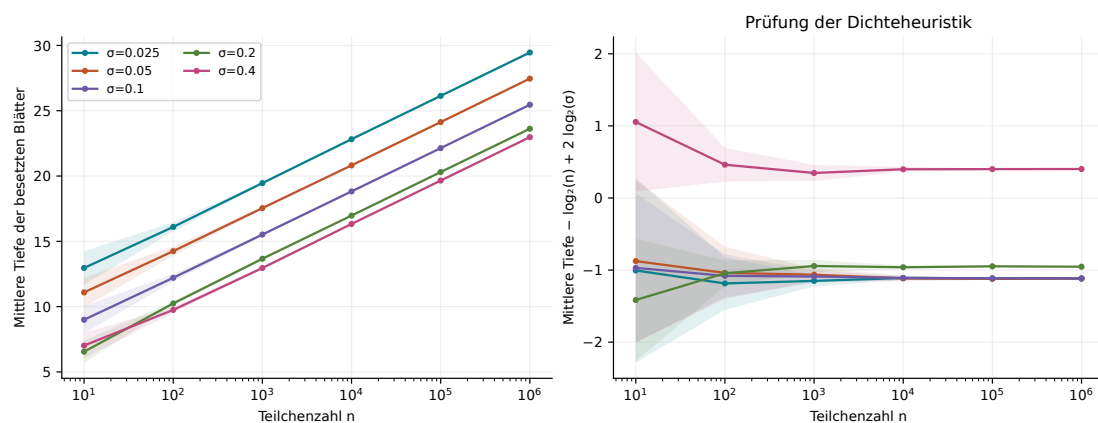


Abbildung 8.2.: V2: Konzentration verändert die nötige Baumtiefe. Die archivierte G1-Diagnostik zeigt die Tiefenentwicklung bei verschiedenen Wolkenbreiten. Schmalere Wolken benötigen tiefere Blätter, auch wenn die Blattzahl ähnlich bleibt. Die gemessene Verschiebung unterstützt die lokale Besetzungsheuristik, beweist aber keine allgemeine Schranke der Maximaltiefe. Wiederaufnahme aus Kapitel 3.

8.3.3. V3: Baumkräfte und Teilchendynamik

Frage und Ziel. Wie viel Kraftgenauigkeit geht durch Gruppierung verloren, und wie unterscheidet sich dies vom Zeitintegrationsfehler?

Prüfung. Direkte Summen dienen als Kraftreferenz, bei grossen Rechnungen nur für dokumentierte Zielstichproben. Bahn- und Zeitschritttests untersuchen anschliessend die Entwicklung. Kapitel 4 trennt Öffnungskriterium, Glättung und Integrator. Bei fast verschwindender Referenzkraft ist insbesondere die Normierung relativer Fehler wichtig.

Konkreter Befund. Die separate Reihe `ROCKS_Zeitschritte` rechnete sechs Varianten bis 0.1 Jahre. Alle hatten dieselben beiden Einsläge und 99998 verbleibende Kleinkörper. Der Makroschritt 0.0025 Jahre lieferte eine feinere numerische Vergleichslösung, keine exakte Referenz. Der Schritt 0.05 Jahre sparte gegenüber den beiden Baselinezeiten etwa 12–17%; die Baselinewiederholung benötigte trotz identischem Endzustandshash etwa 6.1% mehr Zeit.

Diskussion. Ein zehnfacher Makroschritt bedeutet hier nicht zehnfache Schritte des adaptiven schnellen Teilintegrators. Die Ausgabe pro Makroschritt veränderte zugleich den Ausgabeaufwand. Die maximalen Positionsabweichungen zur feineren Vergleichsrechnung lagen je Variante zwischen 0.128 und 0.171 m. Dies sind weder absolute Fehlerschranken noch Langzeitgarantien für chaotische Begegnungen. Galaxien- und Sonnensystemfilme bleiben Demonstrationen, keine unabhängigen Genauigkeitsnachweise.

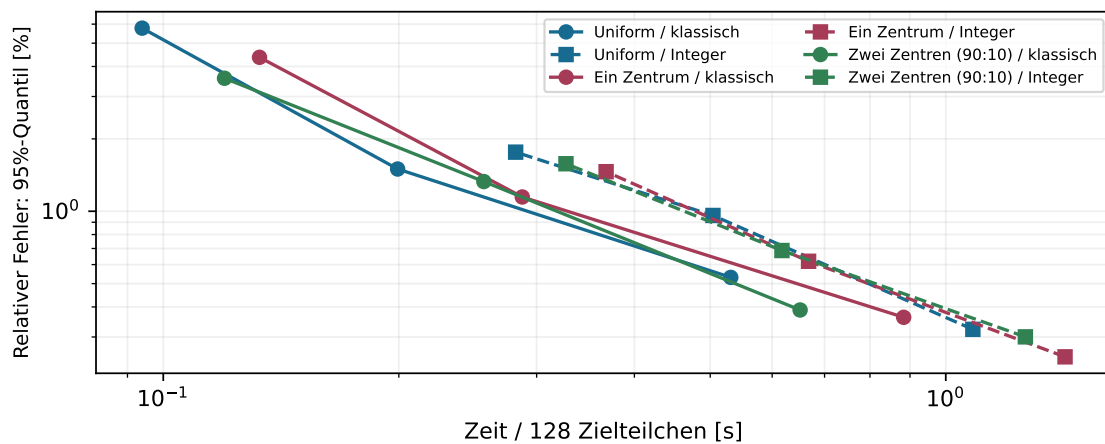


Abbildung 8.3.: V3: Kraftgenauigkeit muss zusammen mit Aufwand beurteilt werden. In der archivierten G4-Reihe entsprechen die drei Punkte jeder Kurve drei Öffnungsparametern; Verbindungslinien sind nur Lesehilfen. Verglichen wird mit direkten Kräften für die dokumentierte Zielstichprobe. Ein kleinerer Fehler bei grösserem Aufwand ist kein kostenloser Gewinn und noch keine Genauigkeitsaussage über lange Bahnen. Erneut aus Kapitel 4.

8.3.4. V4: Rekonstruktion vor der nichtlinearen Strömung

Frage und Ziel. Liefert der Eckstern genügend Information für lineare Rekonstruktion, und welche Genauigkeit kostet die Begrenzung?

Prüfung. Konstante und affine Felder prüfen Konsistenz und Gradientenbestimmung. Quadratische Felder, innere Extremstellen, verschobene Zentren und kontrollierte Randdaten trennen Stencil-, Limiter- und Randeffekte. Noch wird keine vollständige Eulerentwicklung geprüft.

Befund. In `Hydro_Rekonstruktion_05` beträgt die letzte gemessene Ordnung für das uniforme quadratische Minimum ungefähr 2.05 ohne Begrenzung und 1.52 mit Eckwertbegrenzung. Diagnostisch vorgegebene exakte Randspuren ermöglichen wieder ungefähr 2.05.

Diskussion. Die exakten Randdaten sind kein allgemein verfügbarer Bestandteil eines späteren Hydrolaufs. Die Untersuchung lokalisiert einen Genauigkeitsverlust, macht aber unbegrenzte Rekonstruktion nicht automatisch schocktauglich. Ecknachbarn erweitern den Stencil; sie erzeugen keinen zusätzlichen Fluss über einen punktförmigen Kontakt.

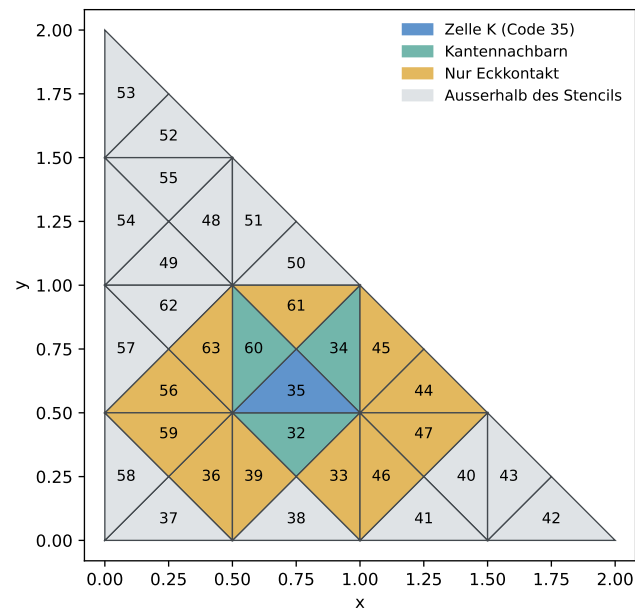


Abbildung 8.4.: V4: Welche Nachbarn die Rekonstruktion prüft. Zur blauen Zelle gehören grüne Kantennachbarn und gelbe reine Ecknachbarn. Beide Gruppen liefern Informationen für den Gradienten, nur Kantennachbarn tauschen unmittelbar Flüsse aus. Die Zahlen sind CFK-Blattcodes. Das aus den Integernachbarn erzeugte Schema zeigt den Stencil, nicht dessen Konvergenzordnung. Erneut aus Kapitel 6.

8.3.5. V5: Eulerwellen und zweidimensionale Belastungen

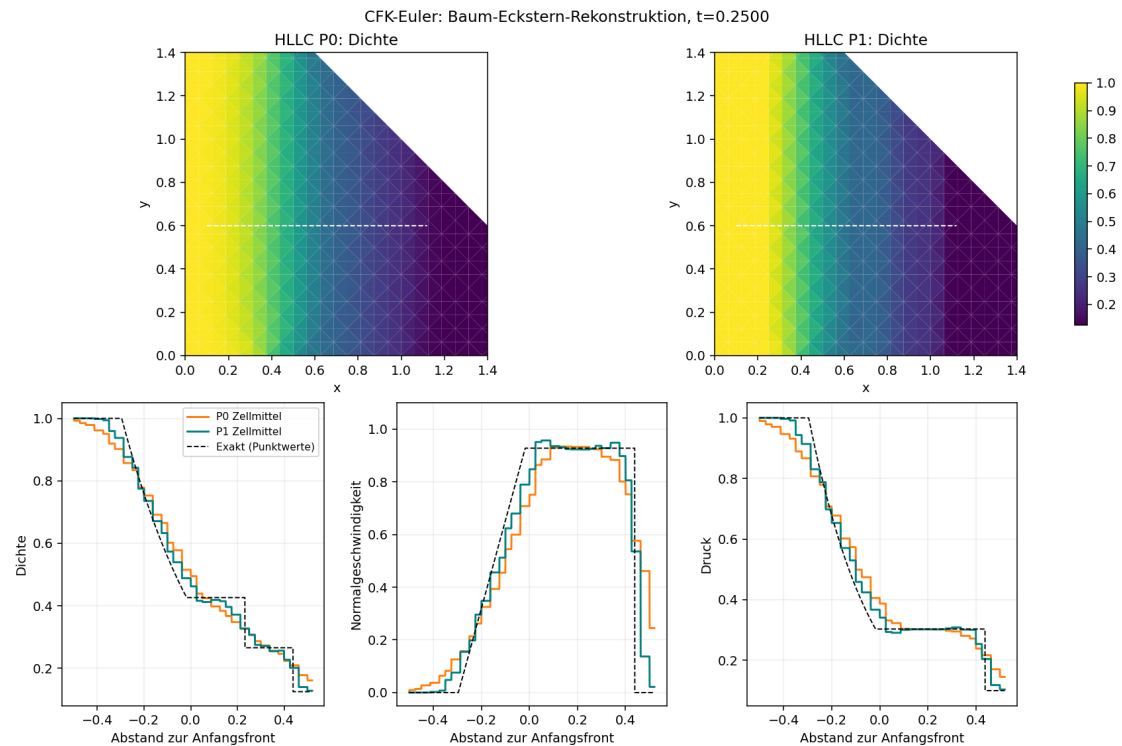
Frage und Ziel. Welche Verbesserung stammt vom Riemann-Löser, welche von Rekonstruktion, und gelingt starke zweidimensionale Expansion?

Prüfung. Hydro_Roe_01 und Hydro_HLLC_01 variieren den Fluss bei konstanter Zellrekonstruktion. Hydro_Euler_P1_02 untersucht danach P0/P1 bei festem HLLC-Fluss. Gedrehte Sod-Probleme verwenden die planare Riemannreferenz; glatter Transport prüft ohne Unstetigkeit. Kreisstoß und Sedov ergänzen echte 2D-Fälle.

Befund. Auf dem feinsten uniformen Sod-Gitter reduzieren Roe und HLLC den Dichtefehler gegenüber Rusanov um etwa 11–13%. Der spätere P1-Vergleich auf Basistiefe 10 verbessert ihn je nach Orientierung und Gitter um etwa 34–42%. Diese verschiedenen Vergleiche dürfen nicht addiert werden. Im glatten Eulertransport liegen beobachtete Ordnungen bei etwa 1.45 und 1.37, noch nicht gesichert bei zwei.

Die 30 radialen Produktionsläufe endeten erfolgreich. Sedov verwendet jedoch eine endliche Anfangsquelle; die selbstähnliche Punktquellenlösung ist eine Grenzreferenz. Eine auf dasselbe Gitter projizierte ideale Kreisfront kontrolliert die Messung der Frontstreuung. Ein radialer Mittelwert allein könnte Winkelartefakte verdecken.

Diskussion. Bilanzreste bis etwa $1.53 \cdot 10^{-14}$ und positive akzeptierte Zustände sind getrennte Befunde. Die häufig aktive Positivitätsskalierung zählt Zellauswertungen, nicht verschiedene Zellen. Ein in einer Reihe nie aktivierter Ersatzfluss ist durch diese Reihe nicht auf seinem Ausnahmeweg geprüft.



8.3.6. V6: Anpassung, Portierung und Parallelisierung

Frage und Ziel. Bleibt die Bilanz bei Gitterwechseln erhalten, und führt die beschleunigte Implementierung dasselbe Verfahren aus?

Prüfung und Befund. `Hydro_AMR_01` vergleicht feste und zeitlich adaptive Gitter für Transportwolke, Kreisstoß und Explosion. Alle 24 Produktionsläufe enden erfolgreich; der maximale berichtete Bilanzrest beträgt $3.21 \cdot 10^{-13}$. Die Namen `adaptive_p0` und `adaptive_p1` betreffen den Transfer, nicht einen Wechsel der Hydrekonstruktion.

Je 32 Python-C++-Vergleichsfälle lokal und auf drei Rechenknoten verwenden relative Toleranz $2 \cdot 10^{-9}$ und absolute Toleranz $5 \cdot 10^{-10}$. Die numerischen Threadvergleiche sind exakt. Alle 45 Benchmarkläufe von `Hydro_CPP_01` besitzen je Fall über Wiederholungen und Threadzahlen identische numerische Hashes.

Diskussion. Dies stützt die Trennung von Verfahren und paralleler Ausführung für die geprüften Fälle, nicht für jede Eingabe und jeden Compiler. Der native Konformitätsabschluss bleibt seriell, obwohl die frühere Pythonkonstruktion einen parallelen Abschluss untersucht hatte. Die Phase `topology` misst diesen Abschluss nicht isoliert.

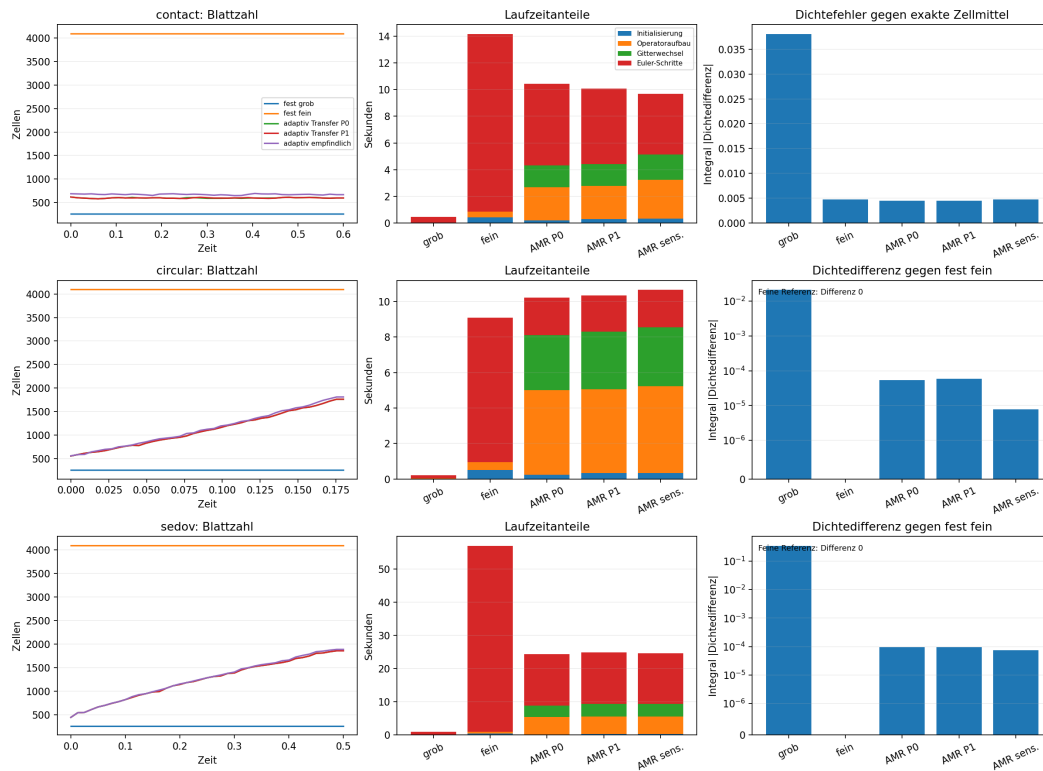


Abbildung 8.6.: V6: Adaptive Auflösung ist mehr als maximale Baumtiefe. Die archivierte Übersicht der AMR-Serie stellt Lösungsqualität und eingesetzte Gitterressourcen gegenüber. Die Bezeichnungen P0/P1 der adaptiven Varianten betreffen den Transfer. Vergleiche mit einer feinen numerischen Lösung sind keine Fehler gegen eine exakte Lösung. Die Reihe prüft Hydro-AMR ohne Selbstgravitation und belegt nicht die gekoppelte Erweiterung. Erneut aus Kapitel 6.

8.3.7. V7: Selbstgravitation und hydrostatische Ruhe

Frage und Ziel. Erhalten Kraft und Energiequelle nicht nur globale Bilanzen, sondern auch lokale Zulässigkeit und annähernde Ruhe?

Prüfung. Die Reihen in Kapitel 7 trennen Baumöffnung, Auflösung, Hintergrunddruck, Quellenarbeit, Nachbarenergieaustausch und Kick/Hydro/Kick. Der lokale Quellen-Drucksenkenfall bleibt eine negative Referenz.

Befund. Weder direkte Kräfte im kleinen Kontrollfall noch ein kleinerer maximaler Zeitschritt beseitigen den dokumentierten Druckfehler der alten Kopplung. Konservativer Nachbarenergieaustausch hilft zunächst, scheitert aber später in einem groben Lauf erneut. Der reine Kraftkick erhält die thermische Energie algebraisch; das ist nicht gleichbedeutend mit exakter globaler Gesamtenergieerhaltung.

Die Ruheläufe mit 16384 und 65536 Zellen erreichen $t = 2$, eine dynamische Zeit. Die relative Dichteänderung fällt von 1.9697% auf 0.6939%, die normierte gemessene Energieänderung von 0.17254% auf 0.011485%. Das Potential wird über eine Baumdiagnose mit zusätzlicher engerer Öffnung kontrolliert, nicht durch eine vollständige direkte Paarsumme.

Diskussion. Zwei Gitter und eine dynamische Zeit belegen weder Langzeitstabilität noch Robustheit bei einem Einschlag. Die Dichteänderung gegenüber dem Anfang ist ein Ruhemass, nicht der Fehler gegen eine bekannte zeitabhängige exakte Lösung. Der Befund rechtfertigt kontrollierte Folgetests.

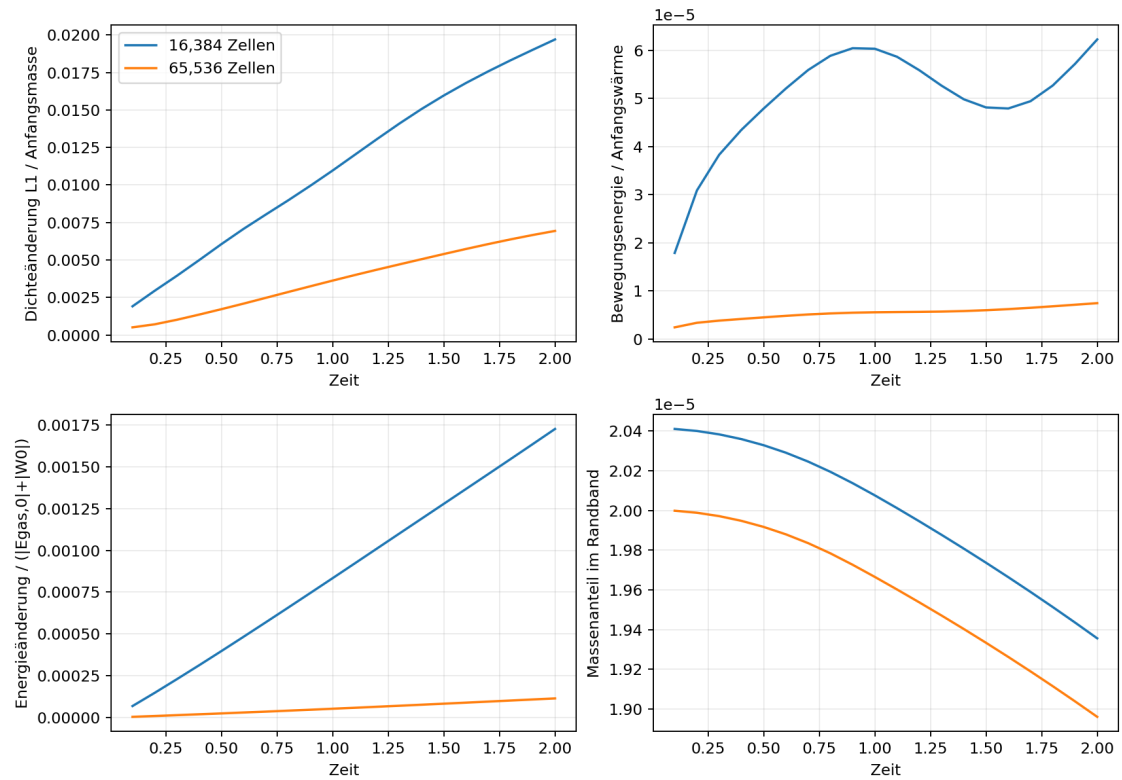


Abbildung 8.7.: V7: Ruhe benötigt mehrere unabhängige Kennzahlen. Die archivierten Verläufe vergleichen die beiden Auflösungen bis $t = 2$. Geringere Dichteänderung, weniger Bewegungsenergie und eine kleinere gemessene Energieabweichung stützen gemeinsam den feineren Zustand. Die Potentialdiagnose bleibt approximativ; eine dynamische Zeit beweist keine Langzeitstabilität. Wiederaufnahme der Ruhediagnostik aus Kapitel 7.

8.3.8. V8: Lange Kollision und Rechenzeitgrenze

Frage und Ziel. Verändert lokale Verfeinerung die längere Kollisionsgeschichte zweier kompakter Gaswolken?

Prüfung und Ergebnis. In `Hydro_Gravitation_06` erreicht der grobe Lauf mit 6594 Zellen $t = 2$. Der feinere Lauf mit 35714 Zellen liefert innerhalb seines Budgets vollständige Daten bis $t = 0.25$. Über 26 gemeinsame Ausgabeweiten wird konservativ restringiert; die letzte Dichtedifferenz beträgt ungefähr 5.48%.

Diskussion. Der Budgetstopp ist kein nachgewiesener numerischer Fehler, lässt aber den langen Auflösungsvergleich offen. Am gemeinsamen Ende liegen im feinen Lauf nur etwa 56.33% der Masse auf der feinsten Stufe; spät im groben Lauf liegen etwa 38.50% im Randband. Die Differenz ist deshalb kein Konvergenzbeweis einer über die gesamte Geschichte gleichermassen aufgelösten isolierten Kollision. Die Reihe verwendet zudem die ältere Kopplung, nicht die neuen Ruheprofile.

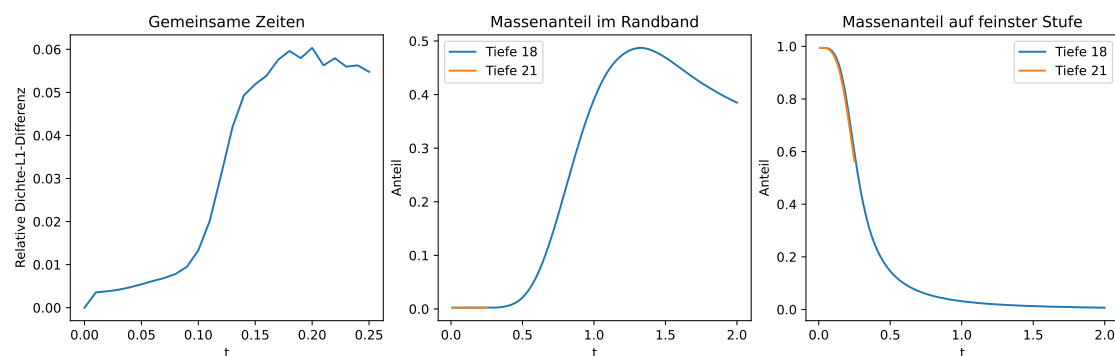


Abbildung 8.8.: V8: Warum eine lange Animation noch keinen langen Auflösungsvergleich ergibt. Links wird nur das gemeinsame Intervall bis $t = 0.25$ verglichen. Randbandmasse und Masse auf der feinsten Stufe zeigen zusätzlich, wo Randnähe und Verlust lokaler Auflösung die Interpretation einschränken. Der längere grobe Verlauf ersetzt die fehlenden feinen Spätzeiten nicht. Archivierte Diagnostik, erneut aus Kapitel 7.

8.4. Belastbare und offene Aussagen

Tabelle 8.1.: Leseschlüssel: Jede positive Aussage gilt nur für das dokumentierte Verfahren und den geprüften Bereich.

Bereich	Gestützte Aussage	Nicht daraus ableitbar
Geometrie	Identitäten und konkrete Invariantenprüfungen.	Beliebige Tiefe ohne Überlauf- und Rundungsprüfung.
Statistik	Strukturtrends und ein exaktes Gegenbeispiel.	Universelle Lageunabhängigkeit.
Kräfte	Vergleich gegen direkte Summen.	Langzeitgenauigkeit aller Teilchenbahnen.
Hydro	Verbesserung in Referenztests und bilanzierte Wellen.	Allgemeiner Entropie- oder Positivitätsbeweis.
AMR	Konservative Transfers in geprüften Hydrofällen.	Validierte Kombination mit Selbstgravitation.
Parallelität	Numerische Gleichheit und gemessener Zeitgewinn.	Vollständig paralleler nativer Gitteraufbau.
Ruhe	Weniger spontane Bewegung auf dem feineren Gitter.	Stabilität über viele dynamische Zeiten.
Kollision	Unterschied im gespeicherten gemeinsamen Intervall.	Konvergierte isolierte Nachkollisionsgeschichte.

8.5. Ausfälle und wissenschaftliche Nachvollziehbarkeit

8.5.1. Nicht jedes Ende ist dasselbe Ereignis

Ein regulärer Abschluss erreicht die gewünschte physikalische Endzeit; ein Budgetstopp eine Rechenzeitgrenze. Ein numerischer Abbruch meldet beispielsweise einen trotz Wiederholung unzulässigen Zustand. Ein Infrastrukturfehler kann vor dem ersten Schritt auftreten: Beim Zeitschrittvergleich auf schmalzberg fehlten der ursprünglichen Binärdatei passende Laufzeitbibliothekssymbole. Der Fehlversuch wurde erhalten; erst ein Neubau des archivierten Quellstands erlaubte die Rechnung. Das ist kein Instabilitätsbefund des Integrators.

Ein Kontrollpunkt dokumentiert den letzten vollständig gespeicherten Zustand, nicht den letzten begonnenen Schritt. Eine alte Statusdatei mit *running* bestimmt deshalb nach

einem externen Stopp nicht den Abschlussstatus. Für Vergleiche werden nur vollständige gemeinsame Zeiten verwendet; fehlende feine Spätzeiten ersetzt der grobe Film nicht.

8.5.2. Was eine Prüfsumme belegt

Die in Anhang B beschriebene Hashkette prüft die unveränderte Datenübergabe. Ein separater Neustarttest vergleicht darüber hinaus die weitere Entwicklung mit einer ununterbrochenen Rechnung.

Bei den Ruheläufen prüfte die archivierte Auswertung den Kontrollpunkthash und die Eingangs-/Ausgangskette aller jeweils 20 Abschnitte. Dies betrifft die dokumentierte Kette, nicht jede spätere Programmversion. Für eine Veröffentlichung müssen die dort genannten Reproduktionsartefakte vorliegen.

8.6. Was Abbildungen und Filme beitragen

Filme können Randreflexionen, wandernde Verfeinerungszonen, Orientierungsartefakte und zu kleine Bildausschnitte sichtbar machen. Sie ersetzen keine Vergleichsnorm. Zwei Läufe benötigen gleiche physikalische Zeit, Ausschnitt und Farbskala; unabhängige automatische Farbskalierung kann erhebliche Unterschiede verbergen. Logarithmische Darstellungen verdünnten Gases sind hilfreich, sofern die Skala klar bezeichnet wird.

Auch Laufzeitdiagramme verlangen eine kontrollierte Versuchsanordnung. Abbildung 5.4 zeigt Mediane und Streubereiche aus randomisiert nacheinander ausgeführten Läufen. Parallel gestartete Produktionsfälle würden einen anderen Gegenstand messen: den Durchsatz einer Versuchsserie statt der Skalierung eines einzelnen Laufs.

8.7. Konsequenzen und Herkunft

Die offenen Aussagen der Übersicht bestimmen die nächsten Prüfziele: glatte Konvergenz, längerfristige Ruhe, Energie bei Gitterwechseln und räumlich wie zeitlich vollständige Kollisionsvergleiche. Ihre technischen Voraussetzungen und Reihenfolge stehen in Kapitel 10.

Herkunft und Beitrag: Bauer verlangte tiefere Bäume, ausführlichere Tests, Rechnervergleiche, sichtbare Kollisionen und längere Nachkollisionszeiten. Die gestaffelten Diagnoseprotokolle wurden im Dialog durch ChatGPT ausgearbeitet und nach Zustimmung umgesetzt. Registergliederung und Zusammenführung der Aussagegrenzen sind redaktionelle Arbeit von ChatGPT auf Grundlage der archivierten Berichte.

9. Diskussion des Entwicklungsprozesses

9.1. Fragestellung der Prozessanalyse

Die vorangehenden Kapitel beschreiben die numerischen Verfahren und Ergebnisse. Nun wird untersucht, wie sie im Dialog entstanden: Welche Aufgaben wurden delegiert, welche fachlichen Eingriffe veränderten den Entwicklungsweg, und welcher Aufwand ist dokumentiert? Die Analyse betrifft die konkrete Zusammenarbeit eines fachlich vorgebildeten Autors mit ChatGPT, vorhandener Software und mehreren Rechnern.

9.2. Quellenlage und analytische Methode

9.2.1. Gespräch, Artefakt und Messung

Die Analyse verwendet drei Arten projektinterner Quellen:

1. **Gesprächsbelege:** ausdrücklich formulierte Ziele, Einwände, Zustimmungen und Änderungswünsche des Autors. Sie belegen eine Äusserung, nicht schon deren Implementierung.
2. **Arbeitsartefakte:** Quelltexte, mathematische Herleitungen, Konfigurationen, Dokumentation und Ideenspeicher. Sie zeigen einen ausgearbeiteten Stand, nicht automatisch dessen erfolgreiche Prüfung.
3. **Versuchsnachweise:** archivierte Eingaben, Ergebnisse, Laufzeitdaten, Vergleichsberichte und Prüfsummen. Ihre Aussagekraft hängt vom Prüfvertrag und von der Unabhängigkeit der Referenz ab.

Eine Aussage wie *der Autor verlangte Ecknachbarn* wird durch das Gespräch gestützt. *Der Solver verwendet Ecknachbarn* verlangt einen Codeabgleich. *Diese Wahl verbessert die Lösung* erfordert zusätzlich einen geeigneten Vergleich. Das Kapitel behandelt diese Aussagen nicht als austauschbar.

Die Berichtsarchive tragen Datierungen vom 16. bis 18. September 2026. Damit ist die Datierung der herangezogenen Archive beschrieben, nicht eine lückenlos gemessene

Nettoentwicklungszeit. Frühere Vorarbeit, Arbeitsunterbrechungen und parallel laufende Tätigkeiten sind damit nicht vollständig erfasst. Auch die zugängliche Gesprächsdarstellung enthält nicht sämtliche früheren Assistentenantworten und Werkzeugprotokolle. Fehlende Belege werden nicht aus dem späteren Erfolg rekonstruiert.

9.2.2. Zuordnung von Entscheidungen

Die Analyse folgt Entscheidungssituationen: Ausgangsfrage, vorgeschlagene Bearbeitung, beobachteter Befund und verbleibende Grenze. Die Kennungen D1–D8 in Tabelle 9.1 sind redaktionelle Suchanker dieses Kapitels. Sie sind keine automatisch vergebenen Nachrichten Kennungen und enthalten keine nachträglich erfundenen Zeitstempel.

Tabelle 9.1.: Gesprächsanker aus Nachrichten des Autors. Kurze wörtliche Ausschnitte erhalten die ursprüngliche Schreibweise. Die rechte Spalte ist die analytische Einordnung dieses Kapitels.

Anker	Aussage beziehungsweise Suchausschnitt	Bedeutung
D1	„Ich möchte Explizit Gitter benutzen, die wir mit Hilfe von Bäumen gewonnen haben.“	Architekturvorgabe des Autors.
D2	„Ich möchte es so gestalten, dass ich es auch intellektuell fassen kann.“	Verständnis als eigenes Projektziel.
D3	„Damas habe ich ROE genommen.“	Fachliche Erinnerung im Einwand zur Schockauflösung.
D4	„Sedov-Taylor-Shock-Test“	Vom Autor vorgeschlagener Belastungstest.
D5	„Haben wir den Baum nicht schon erfolgreich parallelisiert?“	Nachfrage zur Reichweite eines früheren Ergebnisses.
D6	„Bevor du startest: Überprüfe meine Ideen auf Plausibilität.“	Prüfung vor Ausführung eines längeren Kollisionsvergleichs.
D7	„Die Leser sind Menschen.“	Forderung nach Illustration und verständlicher Darstellung.
D8	„Das heisst, dass muss noch in die ToDo liste.“	Offene native Parallelisierung nicht als erledigt führen.

Für Vorschläge von ChatGPT wird zwischen unmittelbarem Gesprächsbeleg und der bereits in den Fachkapiteln dokumentierten Zuordnung unterschieden. Die Herkunftsabschnitte und Prüfvermerke der Kapitel 5–8 sind hier Arbeitsnachweise, aber keine unabhängigen Gutachten. Wo die ursprüngliche Antwort fehlt, wird kein genauer Wortlaut

behauptet. Für eine spätere öffentliche Fassung sollte der vollständige Gesprächsexport, soweit verfügbar und zur Veröffentlichung geeignet, die Suchanker durch stabile Nachrichtenbezüge ergänzen.

9.3. Arbeitsteilung und konzeptionelle Beiträge

9.3.1. Was der Autor einbrachte

Die Rolle des Autors beschränkte sich nicht auf die Abnahme erzeugter Programme. Er bestimmte das zentrale geometrische Prinzip: Das Gitter soll aus einem Baum hervorgehen, und die Baumstruktur soll für Topologie, Nachbarschaften und spätere Physik erhalten bleiben (D1). Ebenso setzte er die Beschränkung auf zwei Dimensionen bei einem langfristigen Ziel dreidimensionaler Rechnungen. Das sind inhaltliche Entscheidungen über das Forschungsobjekt, nicht blosse Bedienungswünsche.

Weitere Beiträge waren die Einbeziehung reiner Ecknachbarn bei der Rekonstruktion, die Erinnerung an Roe und MUSCL, der Sedovtest (D3/D4), die Selbstgravitation als nächste Physik und die Frage nach hydrostatischen Profilen in Analogie zu Lane–Emden. Die Forderung nach längeren Kollisionsgeschichten mit lokal höherer Auflösung formulierte eine vergleichende Forschungsfrage. Vermutungen zu Zellpunktmassen, Randnähe und Auflösung lieferten Diagnosehypothesen, deren Gültigkeit erst zu prüfen war.

Auch Ressourcenentscheidungen lagen beim Autor: Rechner wurden bereitgestellt, Laufzeiten begrenzt oder ausdrücklich erweitert, grosse Vorhaben zurückgestellt. Seine frühere Erfahrung erlaubte es, auffällige Ergebnisse zu erkennen und methodisch nachzufragen. Die Fallstudie kann deshalb nicht als Versuch mit einer fachlich unerfahrenen Bedienperson interpretiert werden.

9.3.2. Was ChatGPT beitrug

Der dokumentierte Beitrag von ChatGPT umfasst mehr als die Umsetzung fertig formulierter Algorithmen. Dazu gehören die Zerlegung grosser Ziele in Kontrollfälle, die Auswahl konkreter Verfahrenskombinationen, die Ausarbeitung von Schnittstellen und Tests sowie die Interpretation negativer Befunde. In den Fachkapiteln werden insbesondere HLLC, Least-Squares-Rekonstruktion mit Begrenzung, SSPRK2 und die experimentelle Kick-Kopplung als vorgeschlagene beziehungsweise ausgearbeitete Schritte zugeordnet. Implementierung, Versuchssteuerung, Auswertungsprogramme und die redaktionelle Synthese wurden im selben Arbeitszusammenhang erstellt.

Diese Leistungen sind verschieden zu bewerten. Die Wahl einer bekannten Methode ist eine konzeptionelle Entwurfsentscheidung, aber keine Erfindung der Methode. Ein erzeugtes Testskript ist ein Arbeitsprodukt; erst dessen geeignete Referenz und erfolgreicher Lauf tragen Evidenz bei. Eine plausible Erklärung ist eine zu prüfende Interpretation. Diese Trennung verhindert, dass sprachliche Ausführlichkeit als mathematische Sicherheit oder erzeugte Codemenge als wissenschaftlicher Fortschritt gezählt wird.

9.3.3. Literatur und gemeinsame Ausarbeitung

Roe, MUSCL, HLLC, Barnes–Hut und Strang-Splitting besitzen eigenständige Literaturursprünge [4, 11, 10, 3, 18]. Dass der Autor Roe aus seiner Diplomarbeit erinnerte, bezeichnet den Weg der Anregung in dieses Projekt, nicht die Urheberschaft des Verfahrens. Entsprechend ist ein von ChatGPT vorgeschlagener Einsatz eines bekannten Verfahrens keine originäre mathematische Neuerfindung.

Zustimmung und Ursprung sind ebenfalls zu trennen. Eine Antwort wie *Ich folge deiner Empfehlung* genehmigt eine vorgeschlagene Richtung; sie macht den Vorschlag nicht rückwirkend zu einer Idee des Autors. Umgekehrt ist die Ausarbeitung einer vom Autor verlangten Ecknachbarschaft nicht allein deshalb eine ursprüngliche Modellidee, weil ChatGPT den Code schreibt. Bei gemeinsam entwickelten Lösungen sind Problemformulierung, Methodenauswahl, Implementierung und Prüfung getrennt zuzuschreiben.

9.4. Entscheidungssituationen als Fallanalysen

9.4.1. Die diffuse Schockfront: ein Einwand wird zum Vergleich

Der Autor reagierte auf eine visuell enttäuschende Sod-Darstellung mit der Vermutung, es seien lediglich naive diskretisierte Differentialflüsse verwendet worden. Er erinnerte an Roe (D3). Die Vermutung traf die vorliegende Methode nicht genau: Auch Rusanov ist ein approximativer Riemann-Fluss, kann aber zusammen mit konstanter Rekonstruktion stark diffus sein. Der Einwand benannte dennoch ein reales Qualitätsproblem.

Die anschliessende Entwicklung trennte Flusswahl und Rekonstruktion. Zuerst wurden Rusanov, Roe und HLLC bei konstanter Rekonstruktion verglichen; danach folgte P1 bei festem HLLC. Kapitel 6 dokumentiert einen begrenzten Gewinn durch den Flusswechsel und einen grösseren weiteren Gewinn durch Rekonstruktion, jeweils innerhalb unterschiedlicher Vergleichsreihen. Der Eindruck einer schärferen alten MUSCL-Rechnung wurde zusätzlich durch den Unterschied zwischen 1D- und 2D-Auflösung eingeordnet.

Analytisch ist daran nicht entscheidend, wer die erste Vermutung richtig formulierte. Entscheidend ist, dass eine fachliche Irritation in trennbare Hypothesen und messbare Vergleiche übersetzt wurde. Der Autor erkannte die unbefriedigende Qualität; die folgende methodische Ausarbeitung lieferte eine genauere Erklärung als die Ausgangsvermutung. Eine direkte Bestätigung des Einwands ohne Flussanalyse wäre ebenso unzureichend gewesen wie das Zurückweisen der Kritik allein wegen ihrer ungenauen Diagnose.

9.4.2. Ecknachbarn: eine Idee verändert nicht jede Gleichung

Die Forderung, auch Zellen mit reinem Eckkontakt zu berücksichtigen, lenkte die Entwicklung auf topologische Ecksterne im CFK-Baum. Sie führte nicht zu zusätzlichen physikalischen Flüssen über Punkte: Ein Eckkontakt hat im zweidimensionalen Randintegral Mass null. Sein Nutzen liegt im Rekonstruktionsstencil.

Diese Unterscheidung zeigt den Wert konzeptioneller Übersetzung. Die informelle Idee wird nicht wortwörtlich an jeder Stelle in Code übertragen, sondern einer passenden mathematischen Aufgabe zugeordnet. Die anschliessenden Affin-, Extremstellen- und Randtests begrenzen den Geltungsbereich. Insbesondere heben aktive Begrenzer eine sonst exakte lineare Rekonstruktion unter Umständen auf. Aus einem reicheren Stencil folgt also keine automatische Genauigkeitsgarantie des Gesamtsolvers.

9.4.3. Negative Drücke: ein guter Globalwert reicht nicht

Die Gravitationskopplung liefert das deutlichste Beispiel dafür, dass eine erfolgreiche Optimierung eine andere Schwäche verdecken kann. Die massenflussbezogene Energiearbeit verbesserte die globale Energiebilanz, während lokal die innere Energie negativ werden konnte. Der Autor fragte nach einem geeigneten Limiter und danach, ob Hydro oder Gravitation verantwortlich sei.

Die Diagnose musste deshalb lokale Beiträge statt nur Gesamtenergie untersuchen. Direkte Kraftkontrollen und kleinere Schritte beseitigten den dokumentierten Fehler der alten Kopplung nicht. Ein konservativer Nachbarenergieaustausch half in kurzen Versuchen, aber nicht allgemein in längeren. Die spätere Kickvariante erhält die thermische Energie im reinen Kraftteil, gibt damit jedoch keinen Beweis exakter Gesamtenergie-erhaltung. Die Ruheläufe prüfen den neuen Kompromiss, nicht die nachträgliche Richtigkeit aller früheren Varianten.

Die Diagnose veränderte damit die Entwurfsanforderungen: Gute globale Energiebilanzen reichten als Kriterium nicht aus; lokale Zulässigkeit und längere Ruhetests wurden zusätzlich erforderlich.

9.4.4. Parallelisierung: derselbe Begriff bezeichnet verschiedene Teile

Mit D5 fragte der Autor nach, ob der Baum nicht bereits parallelisiert worden sei. Die präzise Antwort verlangt die Trennung von Python- Konstruktion, nativem C++-Abschluss, Kraftbaumvorbereitung, Zieltraversierung und Hydrooperator. Der erfolgreiche parallele Abschluss der Pythonvariante belegt nicht dessen Übertragung in den nativen C++-Gitteraufbau.

Der Codeabgleich für Kapitel 5 machte diese Grenze explizit. Die offene native Aufgabe wurde als I-013 im Ideenspeicher abgelegt (D8). Künftige Statusmeldungen müssen deshalb den betroffenen Operator und Implementierungsstand benennen.

9.4.5. Lange Kollision: Budgetgrenze wird zur Erkenntnisgrenze

Der Autor verlangte eine zehn- bis zwanzigfach längere Kollisionsgeschichte und anschließend lokale Verfeinerung um mindestens drei Baumstufen. Vor dem Start bat er ausdrücklich um eine Plausibilitätsprüfung (D6). Die gewünschte Aussage betraf die Wirkung der Auflösung auf die Nachkollisionsentwicklung, nicht nur einen schöneren Film.

Der gesicherte Vergleich erreichte diese Zielsetzung nur teilweise: Der grobe Lauf gelangte bis $t = 2$, der feine innerhalb seines Budgets nur bis $t = 0.25$. Zudem verliess Masse die feinste Zone, und im späten groben Verlauf wurde der Rand wichtig. Damit blieb die lange Auflösungsvergleichsfrage offen, obwohl verwertbare Daten und Animationen entstanden. Ein automatisierter Ablauf hatte hier nicht automatisch ein abgeschlossenes wissenschaftliches Experiment geliefert.

Die Lehre für den Arbeitsprozess ist konkret: Physikalisches Vergleichsziel, Auflösungsabdeckung und Rechenbudget müssen gemeinsam geplant werden. Bei begrenzten Ressourcen ist ein kurzer fairer Vergleich wissenschaftlich wertvoller als eine behauptete lange Konvergenzstudie ohne entsprechende feine Daten. Eine Laufzeitverlängerung bleibt eine neue Ressourcenentscheidung, nicht eine stillschweigende Korrektur des ursprünglichen Versuchs.

9.5. Aufwand: Was gemessen ist und was fehlt

9.5.1. Vier Zeitbegriffe und eine fehlende Gegenprobe

Kalenderdauer, aktive Autorenarbeit, automatisierte Bearbeitung und Simulationszeit sind unterschiedliche Grössen. Sei I_j das reale Ausführungsintervall eines Rechenjobs j .

Dann sind

$$T_{\text{Jobs}} = \sum_j |I_j|, \quad T_{\text{Belegung}} = \left| \bigcup_j I_j \right| \quad (9.1)$$

verschiedene Masse: Bei parallelen Jobs kann die Summe grösser sein als die gemeinsam belegte Kalenderzeit. Eine Threadzahl multipliziert mit Wandzeit wäre wiederum nur eine nominelle Kapazitätsbelegung und nicht ohne Messung tatsächliche CPU-Zeit. Lese-, Denk- und Entscheidungszeit des Autors können teilweise gleichzeitig mit Rechnungen liegen.

Für dieses Projekt existiert kein vollständiges gemeinsames Zeitbuch. Die wenigen gut erfassten Prozesszeiten dürfen deshalb weder zu einer vollständigen Arbeitsbilanz aufaddiert noch als Ersatz für menschlichen Aufwand ausgegeben werden. Ebenso fehlen hier eine vollständige Erfassung der Modellnutzung und eine monetäre Gesamtkostenrechnung. Aus der Nachrichtenanzahl lässt sich keine verlässliche Denkdauer ableiten.

Grösse	Vorliegender Beleg	Grenze
Archivdatierung	Berichte vom 16.–18. September 2026.	Kein lückenloses Entwicklungszeitbuch.
Autorenaufwand	Fragen, Entscheidungen und Hinweise auf Abwesenheiten.	Keine vollständigen aktiven Arbeitsintervalle.
Simulationsaufwand	Zeiten ausgewählter Serien und Abschnitte.	Unterschiedlicher Umfang von Vorbereitung und Diagnostik.
Leistungsgewinn	Kontrollierte Threadvergleiche.	Kein Produktivitätsvergleich mit und ohne ChatGPT.
Frühere Diplomarbeit	Erinnerung des Autors: ungefähr ein Jahr.	Andere Aufgabe, Rahmenbedingungen und Ergebnisreife.

Tabelle 9.2.: Aufwandsbilanz ohne Scheingenaugkeit. Fehlende Einträge werden nicht aus späteren Ergebnissen oder Dateidatierungen geschätzt.

9.5.2. Quantitative Beispiele mit begrenzter Bedeutung

Der native feste Sedovfall benötigte im dokumentierten Benchmark median 13.839 s mit einem und 4.881 s mit sechs Threads. Der Faktor 2.84 beschreibt die Beschleunigung dieser Evolution durch Threadparallelität. Er misst weder den Gewinn durch C++ gegenüber Python noch den Gewinn durch ChatGPT gegenüber manueller Entwicklung.

Die beiden Scheibenruheläufe benötigten 115.6 beziehungsweise 1299.1 s native Rechenzeit. Vierfache Zellzahl verursachte hier also deutlich mehr als vierfachen Aufwand; unter anderem änderten sich Schrittzahl und Arbeit pro Schritt. Die bis zur letzten Abschnittsdiagnose erfassten Zeiten betrugen dagegen 148.2 und 1461.2 s und enthielten mehr Arbeit, aber noch nicht die abschliessende strengere Potentialkontrolle. Gerade diese unterschiedlichen Zeitgrenzen zeigen, warum eine einzelne Zahl ohne Messumfang irreführend wäre.

Die 45 Hydrobenchmarkläufe und die je 32 Python-C++-Vergleichsfälle lokal und auf dreiheimden belegen einen konkreten Prüfaufwand. Ihre Zahl ist kein allgemeines Qualitätsmass. Viele ähnliche Fälle ersetzen nicht einen fehlenden entscheidenden Grenzfall; ein sehr kleiner Gegenversuch kann eine universelle Behauptung widerlegen. Die Arbeit bewertet deshalb Prüfziele und Ergebnisse, nicht bloss die Anzahl gestarteter Rechnungen.

9.5.3. Warum kein Faktor gegenüber dem Diplomarbeitsjahr folgt

Ein Produktivitätsfaktor würde für ein festgelegtes Ergebnis mit gleicher Qualität die Aufwände zweier Arbeitsweisen vergleichen. Hier fehlt die Gegenprobe: Dieselbe Person hat nicht dieselbe heutige Aufgabe unter vergleichbaren Bedingungen noch einmal ohne Unterstützung ausgeführt. Auch die alte Diplomarbeit ist keine solche Kontrolle. Vorwissen, verfügbare Software, Rechner, Umfang der Literaturarbeit und Grad der abschliessenden Absicherung unterscheiden sich.

Der Kontrast ist dennoch dokumentarisch wertvoll. Innerhalb der datierten Arbeitsphase entstanden eng aufeinander folgende Implementierungs-, Test- und Darstellungsartefakte. Die Fallstudie zeigt damit, *welche* Arbeit in dieser Zusammenarbeit geleistet und geprüft wurde. Sie misst nicht, *wie viele Male* diese Zusammenarbeit schneller als eine gleichwertige Alternative war. Ein entsprechender Produktivitätsfaktor bleibt unbestimmt.

9.6. Exaktheit und die Rolle unabhängiger Kontrolle

9.6.1. Abgestufte Absicherung statt eines Gütesiegels

Die stärksten Nachweise dieses Projekts sind jeweils eng formuliert: rationale Geometrie-kontrollen, mathematische Bilanzargumente, Referenzlösungen für ausgewählte Probleme, direkte Kraftvergleiche, Regressionen und gesicherte Restartketten. Sie betreffen verschiedene Fehlerklassen. Ein SHA-256-Nachweis prüft Datenidentität, nicht die Physik; ein fehlerfreier Compilerlauf prüft nicht die Diskretisierung.

Dasselbe gilt für Softwarewerkzeuge. Im archivierten C++-Hydrobericht sind erfolgreiche ASan/UBSan-Prüfungen dokumentiert, jedoch mit deaktivierter Leckprüfung, weil deren Ausführung in der überwachten Umgebung nicht möglich war. Die präzise Aussage lautet nicht *alle Speicherfehler ausgeschlossen*. Eine bekannte Einschränkung ist Teil des Prüfergebnisses und darf bei der Zusammenfassung nicht verschwinden.

9.6.2. Gemeinsame Fehlerquellen von Erzeugung und Prüfung

Wenn ChatGPT sowohl ein Verfahren implementiert als auch dessen Tests und Erklärung erstellt, können alle drei dieselbe falsche Annahme teilen. Python-C++-Übereinstimmung sichert die Portierung ab, wäre aber bei einer gemeinsamen Modellverwechslung kein unabhängiger Gegenbeweis. Auch eine nachträgliche Prüfung durch dasselbe Assistenzsystem ist nicht gleichbedeutend mit einer unabhängigen fachlichen Begutachtung.

Im Projekt mindern mehrere Vergleichsarten dieses Risiko: exakte Geometrie statt nur Gleitkommageometrie, analytische Riemannzustände statt nur zweier numerischer Gitter, direkte Kräfte statt nur zweier Baumöffnungen und Änderungen einzelner Einflussgrößen. Wo diese Unabhängigkeit fehlt, wird die Aussage eingeschränkt. Die Potentialkontrolle der Ruheläufe mit engerer Baumöffnung bleibt beispielsweise eine verwandte numerische Diagnose, kein vollständiger direkter Paarenergienachweis.

Vor einer Veröffentlichung wäre eine gezielte externe Durchsicht besonders für die CFK-Nachbarschafts- und Abschlusssätze, die Quellenenergie und die behaupteten Modellinterpretationen sinnvoll. Das ist ein offener Prüfschritt, nicht etwas, das die vorliegende Selbstdokumentation bereits ersetzt hätte.

9.7. Verständnis als Ergebnis und als Engpass

Der Autor verlangte ausdrücklich, den Fortschritt intellektuell nachvollziehen zu können (D2). Später benannte er, inhaltlich abgehängt worden zu sein, und fragte nach dem tatsächlich verwendeten Flussverfahren. Diese Äusserungen zeigen eine Spannung innerhalb derselben Zusammenarbeit: Die Produktion neuer Stände kann schneller voranschreiten als ihre fachliche Aneignung durch den Auftraggeber.

Ein ausführlicher Text allein löst dieses Problem nicht. Nötig ist eine Darstellung, die die entscheidende Wahl sichtbar macht: Welche Gleichung wird approximiert? Welche Eigenschaft soll die Änderung verbessern? Was wird dafür aufgegeben oder bleibt unbewiesen? Genau deshalb werden in dieser Arbeit beispielsweise Rusanovdiffusion, P1-Rekonstruktion, Positivität und Energieerhaltung getrennt erklärt. Der Autor muss

nicht jede Implementierungszeile gleichzeitig prüfen, sollte aber die wissenschaftlich folgenreiche Entscheidung verstehen können.

Auch Zwischenberichte haben hier eine fachliche Funktion. Die wiederholte Bitte um Rückmeldungen und die Nachfrage nach einem ausgebliebenen Bericht belegen einen Informationsbedarf; sie belegen nicht allein eine vollständige Statistik eingehaltenen oder versäumten Meldetakts. Ein nützlicher Bericht nennt den aktuellen Teilauftrag, den belegten Fortschritt, den nächsten Prüfschritt und die Unsicherheit einer Restzeit. *Es läuft* ersetzt weder einen Ergebnisstand noch die Unterscheidung zwischen Laufzeitbudget und physikalischer Endzeit.

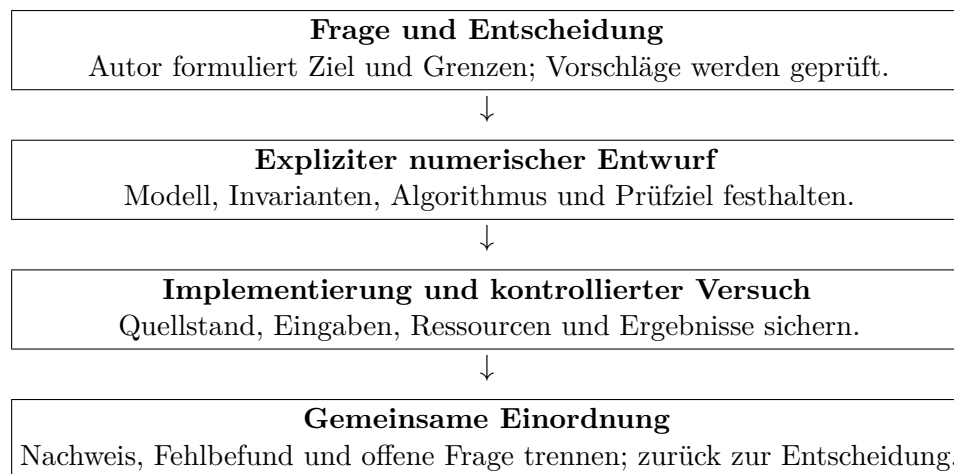


Abbildung 9.1.: Analytisches Schema der produktiven Rückkopplung, keine gemessene Zeitachse. Entscheidend ist die Rückkehr von Ergebnissen zu prüfbaren Entscheidungen, nicht eine möglichst lange ununterbrochene Folge automatisch erzeugter Änderungen.

Die gewünschten Animationen erfüllen dabei zwei Funktionen: Sie vermitteln die Arbeit anschaulich und können unerwartete Strukturen sichtbar machen. Der Wunsch nach *Werbung* wurde im Gespräch ausdrücklich formuliert. Das ist mit wissenschaftlicher Arbeit vereinbar, wenn die Darstellung als Demonstration bezeichnet bleibt und Referenzschnitt, Farbskala, Auflösung und Randkontakt die Interpretation kontrollieren. Ein überzeugender Film darf eine nicht abgeschlossene Vergleichsfrage nicht verdecken.

9.8. Autonomie benötigt Grenzen und ein Projektgedächtnis

Die Möglichkeit, Rechnungen auf dreihenden und schmalzberg auszulagern, erlaubte eine Trennung von Dialog, Rechenarbeit und Auswertung. Der autonome Nachlauf sollte unabhängig von der lokalen Verbindung laufen; Ressourcenlimit, vollständiger Kontrollpunkt und gesonderte Auswertung waren dafür eigenständige Aufgaben. Autonome Ausführung bedeutet in diesem Zusammenhang nicht autonome Entscheidung über beliebige neue Rechenbudgets oder eine eigenmächtige Änderung des Forschungsziels.

Der lange Dialog erzeugte gleichzeitig offene Nebenfragen. Auf Wunsch des Autors entstand deshalb ein Ideenspeicher, der auch nachträglich wiedergefundene Vorschläge aufnimmt. Die Kennzeichnung unterscheidet Ursprung, Wiederentdeckung, Relevanz und Bearbeitungsstand. Besonders wichtig ist der Unterschied zwischen *nicht umgesetzt* und *Umsetzungsstand noch zu prüfen*. Eine fehlende Erinnerung ist kein Nachweis fehlender Implementierung.

Dokumentation ist damit nicht nur ein später Bericht, sondern Teil der Projektsteuerung. Einzelne Kapiteldateien, archivierte Versuchsstände, ein nachvollziehbarer Ideenspeicher und eine Benutzungsanleitung sollen die Weiterarbeit ohne denselben Chat ermöglichen. Ob eine andere Person das Projekt tatsächlich ohne ChatGPT übernehmen kann, ist bislang aber nicht durch einen unabhängigen Übergaberversuch nachgewiesen.

9.9. Grenzen der Fallstudie und wissenschaftliche Neuheit

9.9.1. Mögliche Verzerrungen

Die Fallstudie hat keine Kontrollgruppe und nur einen fachlich vorgebildeten Autor. Die Aufgabenwahl änderte sich während der Arbeit; die zu Beginn diskutierte Staubscheibe ist nicht identisch mit dem späteren Hydroprojekt. Der Ergebnisumfang ist deshalb kein fest vorab definierter Testkatalog für die Leistungsfähigkeit von ChatGPT. Die Entwicklung nutzt zudem Vorarbeiten und etablierte Verfahren, deren Entstehungsaufwand nicht zur aktuellen Arbeitszeit gerechnet werden darf.

Die nachträgliche Darstellung kennt bereits die Ergebnisse. Dadurch könnte eine gradlinige Planung suggeriert werden, wo tatsächlich Varianten ausprobiert und verworfen wurden. Die Aufnahme negativer Drücke, des nur teilweise erfüllten Kollisionsvergleichs und offener nativer Parallelisierung wirkt dieser Gefahr entgegen, garantiert aber keine vollständige Erfassung aller Fehlversuche. Auch ist die redaktionelle Interpretation durch ChatGPT Teil des untersuchten Prozesses selbst, nicht die Auswertung durch eine unbeteiligte Beobachtungsinstanz.

Ohne vollständigen Gesprächs- und Werkzeugexport lassen sich weder sämtliche Vorschläge zählen noch modellbedingte Fehlerquoten bestimmen. Ebenso wird keine konkrete Modellversion oder Konfiguration rückwirkend aus dem Schreibstil erschlossen. Für eine öffentliche Fallstudie sollten verfügbare Laufmetadaten ergänzt und verbleibende Lücken erhalten bleiben.

9.9.2. Einordnung gegenüber verwandten Verfahren

Die integerbasierte CFK-Topologie und ihre Nutzung für Hydro- und Gravitationsinfrastruktur bilden den charakteristischen Schwerpunkt. Binäre Pfadadressen, Bisektion und Baumverfahren für sich begründen jedoch keine wissenschaftliche Neuheit. Verwandte Triangulations- und Simplexverfahren [1, 2] müssen für einen Prioritätsanspruch systematisch nach Indexdefinition, Nachbarregeln, Konformität, Komplexität und tatsächlich erreichten Eigenschaften verglichen werden. Eine eigene Herleitung kann korrekt und nützlich sein, ohne neu zu sein.

Auch die Bitgeometrieoptimierung ist gegenwärtig eine Untersuchungsfrage, keine bereits nachgewiesene Beschleunigung. Diese Unterscheidung betrifft gerade den interessantesten Teil des Projekts: Fachliches Interesse und eine plausible Idee sind gute Gründe für weitere Forschung, aber kein Ersatz für Literaturabgleich und Messung.

9.10. Protokoll für die Fortsetzung

Aus den untersuchten Entscheidungssituationen folgen fünf Anforderungen an eine künftig prospektive Dokumentation:

1. Vor jeder Etappe Ziel, Autor der Anregung, vorgeschlagene Methode, Qualitätskriterium und Ressourcenlimit festhalten.
2. Autorenarbeitsintervalle und automatische Rechenintervalle getrennt erfassen; Überlappungen nicht als zusätzliche Kalenderdauer zählen.
3. Quellstand, Eingabe und Referenz vor dem Versuch fixieren; Abweichungen und verworfene Varianten mit Grund erhalten.
4. Nach der Etappe Ergebnis und Verständnisstand besprechen. Offene Annahmen ausdrücklich in die nächste Entscheidung übernehmen.
5. Wichtige Nachweise unabhängig nachrechnen oder fachlich prüfen lassen; eine dokumentierte Übergabe an eine andere Person erproben.

Dieses empfohlene Protokoll ist noch nicht vollständig umgesetzt; es würde die weitere Forschung und ihre Prozessbewertung besser absichern.

Herkunft und Beitrag: Motivation und Forderung nach offener Zuschreibung stammen von Pascal Bauer. Analyse und Auswahl der Fallbeispiele wurden von ChatGPT anhand des zugänglichen Gesprächs und der Projektarchive ausgearbeitet. Eine persönliche Rückschau des Autors auf seinen Lern- und Arbeitsaufwand sowie eine unabhängige Begutachtung stehen noch aus.

10. Nächste Schritte und Übergang nach drei Dimensionen

10.1. Prioritäten in zwei Dimensionen

10.1.1. Verbindliche Reihenfolge der Arbeitsarten

Für die Fortsetzung gilt die vom Autor gewünschte Reihenfolge: **technische Weiterentwicklung vor systematischen Testkampagnen, Testkampagnen vor Demonstrationen**. Ein attraktiver Film rechtfertigt keine Umgehung einer noch fehlenden numerischen Voraussetzung. Die folgende Liste ist ein Arbeitsplan, keine Meldung bereits erledigter Aufgaben und keine Freigabe neuer Rechenläufe.

Dabei muss zwischen entwicklungsbegleitenden Prüfungen und einer grösseren Versuchsserie unterschieden werden. Ein neu implementierter Nachbaralgorithmus wird unmittelbar mit seiner Referenz verglichen; diese kleine Prüfung gehört zur technischen Aufgabe. Erst nach einem abgesicherten Stand folgen umfangreiche Parameter-, Konvergenz- und Langzeitreihen. *Technik zuerst* bedeutet also nicht, ungeprüften Code anzuhäufen und erst am Schluss zu testen.

10.1.2. A: Technische Weiterentwicklung

Innerhalb der ersten Prioritätsklasse wird folgende Reihenfolge empfohlen. Die Einträge beziehen sich auf den Ideenspeicher, ersetzen ihn aber nicht.

1. **A1: Hydro-Gravitations-Kopplung konsolidieren.** Die experimentelle Kickvariante als klar benannten, reproduzierbaren Referenzpfad erhalten. Quellenenergie, Potentialdiagnose, Zulässigkeit und Abbruchregeln in einer gemeinsamen Schnittstelle dokumentieren. Für geringere Ruhedrift eine diskret balancierte Druck-Kraft-Behandlung entwickeln; die Literatur zu Well-balancing liefert dafür Ansätze, aber keine unverändert übertragbare Lösung für unsere Baumkräfte [21]. Ein Druck-Floor darf Energiefehler nicht unsichtbar machen. Abgeschlossen ist diese Aufgabe erst mit eindeutigem Energievertrag und gezielten lokalen Bilanz- und Zulässigkeitsprüfungen.

2. **A2: Gravitative Zellquellen genauer darstellen.** Zellpunktquadratur, Nahfeldintegration und Fernfeldapproximation trennen. Ausgedehnte Zellquellen oder höhere Massenmomente sind mögliche Varianten zu I-008, nicht austauschbare Namen für denselben Algorithmus. Zunächst kleine direkte Referenzen bereitstellen; dann eine Variante mit konsistenten Kräften und Potentialen auswählen. Eine feinere Hydroauflösung allein beseitigt eine inkonsistente Energiekopplung nicht.
3. **A3: Selbstgravitation mit dynamischer AMR verbinden.** Die gegenwärtige Sperre erst aufheben, wenn Verfeinerung und Vergröberung neben Masse, Impuls und Gasenergie auch die Änderung der diskreten Potentialenergie sichtbar machen. Bei unveränderter physikalischer Dichte kann bereits die geänderte Zellquadratur eine Energiedifferenz erzeugen. Diese darf nicht ungeprüft als Wärme verteilt werden. Ein Kraft-Balance-Indikator (I-009), Hysterese und die nachgeführte Auflösung bewegten Gases gehören in denselben Entwurf.
4. **A4: Rand- und Gebietsbehandlung verbessern.** Für ausgedehnte Kollisionen ein grösseres Gebiet und kontrollierte offene Hydroränder vorsehen. Ausströmende Masse muss mit Impuls- und Energiefluss bilanziert werden; ein offener Rand ist nicht automatisch reflexionsfrei. Isolierte Gravitation und Hydrorand sind getrennte Vorschriften. Für Ruheprofile braucht auch das dünne Hintergrundgas eine explizite Modell- und Energiebehandlung.
5. **A5: Den nativen Rechenkern skalierbar machen.** Wiederverwendbare Arbeitsbereiche statt wiederholter Allokation in Teilintervallen einführen. Aufbauphasen einzeln instrumentieren und erst danach den nativen Konformitätsabschluss sowie Geometrie-, Nachbar- und Eckstern Tabellen parallelisieren (I-013). Private Anforderungen und deterministische Vereinigungen haben Vorrang vor gemeinsamen schreibenden Containern. Spitzenspeicher und gesamte Prozesszeit müssen neben dem Hydrokern erfasst werden. GPU- oder Mehrrechnerparallelität sind spätere Optionen, keine Voraussetzung für den ersten belastbaren Ausbau.
6. **A6: Konfiguration, Daten und Wiederanlauf vereinheitlichen.** Physikalische Parameter, numerische Varianten und Buildoptionen getrennt deklarieren (I-002). Vollständige Neustartzustände von reduzierten Analyse- und Filmausgaben trennen; kontrollierte Kompression und Ausgabeintervalle behandeln (I-003). Stabile Blattbeziehungsweise Teilchenidentitäten bleiben von Arraypositionen getrennt. Die Bedienung muss ohne denselben Chat möglich sein.
7. **A7: Bitgeometrie gezielt optimieren.** Den vorhandenen Decoder gegen die exakte Referenz profilieren und blockweise Bitoperationen beziehungsweise Übergangstabellen untersuchen (I-001). Zuerst portable C++-Operationen; Intrinsics oder Assembler erst bei einem nachgewiesenen Engpass. Die Optimierung muss

den Gesamttablauf verbessern, nicht bloss eine isolierte Hilfsfunktion. Lokale Zeitschritte und höherordentliche Rekonstruktion werden erst nach dieser Baseline als eigenständige Erweiterungen angegangen.

10.1.3. B: Systematische Tests nach dem technischen Ausbau

Die zweite Prioritätsklasse dient der wissenschaftlichen Freigabe des jeweiligen Stands. Die Reihen werden erst nach ihren technischen Voraussetzungen ausgeführt, nicht sämtlich nach jeder kleinen Änderung.

1. **B1: Fehlerquellen getrennt variieren.** Gitterweite, Zeitschritt, Baumöffnung und Quellenregularisierung einzeln untersuchen. Bei einer räumlichen Konvergenzreihe zunächst dasselbe physikalische Glättungsmodell halten; ein gleichzeitig verändertes ϵ ist eine zusätzliche Modellvariation.
2. **B2: Mehrere dynamische Ruhezeiten.** Dichteänderung, kinetische Energie, Masse, Gesamtenergie und Randflüsse gemeinsam prüfen. Die erlaubte künstliche Eigenbewegung muss kleiner sein als das später untersuchte Kollisionssignal. Es gibt dafür keinen universellen Prozentwert.
3. **B3: Bewegte und adaptive Kontrollen.** Ein ruhendes Profil, ein verschobenes beziehungsweise bewegtes Profil und kontrollierte Gitterwechsel trennen Lage-, Transport- und Transferfehler. Den unerwünschten Einfluss des Ausgabetakts auf Anpassungstermine untersuchen.
4. **B4: Portabilität und grosse Gitter.** Gleiche Eingaben und Referenzen auf den verfügbaren Rechnern vergleichen; Speicher und Wandzeit bis zur angestrebten Größenordnung mehrerer hunderttausend Zellen messen. Erst daraus belastbare Budgets für längere Serien ableiten.
5. **B5: Kontrollierte Kollisionsreihe.** Ungestörte Eigenentwicklung als Kontrolle, gleicher physikalischer Vergleichszeitraum, ausreichend aufgelöste bewegte Wolken und Randunabhängigkeit verlangen. Ein Zeitbudgetstopp ist als unvollständiger Vergleich zu dokumentieren.

10.1.4. C: Demonstrationen als letzte Priorität

Erst danach folgen längere Filme von Wolkenkollisionen oder dem Einschlag eines kleinen Körpers. Ein reines Gravitationsteilchen ersetzt keinen hydrodynamisch aufgelösten Impaktor: Es überträgt ohne zusätzliches Modell weder Material noch Stosswärme auf die richtige Weise. Die Demonstration soll eine bereits geprüfte Fragestellung sichtbar machen.

Filmqualität und längere Spielzeit sind keine Begründung, unzureichend gespeicherte oder nicht vergleichbare Daten zu überinterpretieren.

10.2. Was ein dreidimensionaler CFK-Code zunächst bedeuten soll

10.2.1. Geometrische Definition vor Portierung

Der Name *3D-CFK* bezeichnet hier ein Entwicklungsziel, noch keine vollständig spezifizierte Verfeinerungsfamilie. Zuerst müssen Wurzeltetraeder, Eckreihenfolge, Bisektionskante, Kindnummerierung und Kompatibilität benachbarter Wurzeln festgelegt werden. Ein sinnvoller Ausgangspunkt ist eine kompatible Zerlegung eines Würfels in sechs geordnete Tetraeder; sie liefert ein handhabbares Rechengebiet und zugleich frühe Tests der Wurzelübergänge. Ein einzelnes Wurzeltetraeder bleibt eine nützliche geometrische Kontrolle, ist aber kein besonders günstiger Kollisionsraum.

Maubach beschreibt eine Bisektion mit speziell kompatibler Eckordnung und kontrollierten Formklassen [22]. Das ist ein Kandidat für die geometrische Grundlage, kein bereits geführter Nachweis für unsere zukünftige Implementierung. Burstedde und Holke zeigen bitbasierte Simplexindizes für Rotverfeinerung [2]: dort entstehen in 3D acht Kinder, nicht die zwei unserer gewünschten Bisektionshierarchie. Diese Literatur belegt Möglichkeiten der Indexierung, ersetzt aber nicht die Wahl und Prüfung der eigenen Teilungsregel.

Die Empfehlung lautet, zuerst einen dokumentierten Bisektionsentwurf mit exakter Referenz zu übernehmen beziehungsweise abzuleiten. Ein radikal neuer Decoder und ein neuer Hydrooperator sollten nicht zugleich die erste 3D-Kontrolle bilden. Die bewährte 2D-Referenz bleibt unverändert als Vergleichs- und Lernsystem erhalten.

10.2.2. Leicht übertragbare algebraische Bestandteile

Bei einer deterministischen binären Teilung bleiben

$$k_L = 2k, \quad k_R = 2k + 1, \quad k_{\text{Eltern}} = k \gg 1, \quad d(k) = \text{bitlength}(k) - 1 \quad (10.1)$$

gültig. Diese Operationen betreffen die Baumstruktur, nicht die Dimension. Präfixprüfung, Vorfahren, vollständige Bäume und die deterministische Zuordnung von Zustandsarrays bleiben daher konzeptionell einfach. Für Halbierung des Volumens gilt

$$V_k = V_W 2^{-d(k)}. \quad (10.2)$$

Ein Tetraederschwerpunkt ist das Mittel seiner vier Ecken. Masse und Massenschwerpunkt lassen sich weiterhin von den Kindern nach oben aggregieren. Auch die Strategie *ein Ziel, ein Schreibbereich* für Kraftberechnung und Zelloperationen ist dimensionsunabhängig. Einfach bedeutet hier geringe konzeptionelle Neuerung, nicht fehlende Notwendigkeit von Implementierung und Regressionstests.

10.3. Bitcodierung: der eigentliche geometrische Risikobereich

10.3.1. Ein Pfadbit ist noch keine räumliche Koordinate

Aus einer festen Wurzel und einer festen Teilungsregel bestimmt der vollständige Pfad die Geometrie eindeutig. Trotzdem enthält das letzte Bit allein keine Information darüber, welche globale Raumrichtung geteilt wurde. Dafür wird der durch frühere Teilungen erreichte lokale Zustand benötigt: Eckordnung, Orientierung, Teilungstyp und ausgezeichnete Kante. Vier lokale Ecken besitzen $4! = 24$ mögliche Bezeichnungen; diese Zahl ist keine Behauptung über 24 geometrische Formklassen.

Ein möglicher Decoder führt deshalb einen endlichen Regelzustand s und eine affine Abbildung vom Referenztetraeder mit:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + A\xi, \quad s' = T(s, \beta), \quad \beta \in \{0, 1\}. \quad (10.3)$$

Die Transformation von $A, \mathbf{b}$ beim nächsten Kind und die Zustandstabelle T müssen aus der gewählten Bisektion hergeleitet werden. Dass ein solcher endlicher Zustandsraum für die ausgewählte Familie genügt, ist zu belegen. Der erste Referenzdecoder darf $O(d)$ Pfadschritte benötigen; erst danach lohnt die Verarbeitung mehrerer Bits zugleich.

Ist s aus Wurzel und Pfad rekonstruierbar, muss es nicht zwingend im Adressinteger gespeichert werden. Ein separat gecachter Typ kann dennoch Rechenzeit sparen. Zusätzliche Typbits sind also eine Designentscheidung, nicht automatisch eine Voraussetzung jeder 3D-Codierung. Ein gemeinsames Präfix allein bestimmt weiterhin keinen euklidischen Abstand.

10.3.2. Wurzelidentität, Wortbreite und exakte Arithmetik

Bei mehreren Wurzeln lautet die Identität mindestens (Wurzelnummer, k). Dazu kommen eine Tabelle der Wurzelflächen und ihre lokalen Eckpermutationen. Ein naiver Vergleich gleicher Pfadintegrals aus verschiedenen Wurzeln wäre falsch. Separat gespeicherte Wurzelnummern vermeiden zunächst, die Pfadtiefe durch voreiliges Packen von Metadaten zu verkürzen.

Die heutige Schnittstelle `CPP/include/cfk/code.hpp` verwendet `uint64_t`, eine führende Wurzel-1 und höchstens 63 Teilungsbits. Bei formkontrollierter uniformer Verfeinerung skaliert die charakteristische Länge in 3D wie $h \sim V^{1/3} \sim 2^{-d/3}$, statt $2^{-d/2}$ in 2D. Für denselben linearen Auflösungsgewinn werden damit ungefähr $3/2$ so viele binäre Ebenen benötigt. 63 Ebenen entsprechen grössenordnungsmässig 21 linearen Halbierungen in 3D, nicht 63. Dies ist eine Skalenbetrachtung, keine Schranke für die längste Kante eines beliebigen Tetraeders.

Mittelpunktsbisektion dyadischer Wurzelkoordinaten erhält dyadische Ecken. Das erlaubt eine exakte Integerreferenz, aber nicht automatisch beliebig tiefe Rechnungen in einem Maschinenwort. Determinanten und Kreuzprodukte benötigen grössere Zwischenwerte als die Eingangskoordinaten. Für

$$V = \frac{1}{6} |\det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{d} - \mathbf{a})| \quad (10.4)$$

müssen Vorzeichen und Überlauf gesondert kontrolliert werden. Eine breitere Adresse allein löst weder diese Arithmetikgrenze noch Rundung und Auslöschung im späteren Gleitkommasolver. Eine Mehrwortadresse sollte darum hinter derselben geprüften Adressschnittstelle liegen.

10.3.3. Flächennachbarn und konformer Abschluss

Die Nachbarfunktion erhält in 3D eine lokale Fläche statt einer Kante. Sie muss beim Aufsteigen und erneuten Absteigen im Baum die Eckpermutation der gemeinsamen Dreiecksfläche mitführen. Schon deren drei Ecken besitzen sechs mögliche Zuordnungen. An einer Wurzelgrenze wird zusätzlich die Wurzelverknüpfung benötigt. Ein einzelnes Bit-XOR wie beim Geschwister ist daher keine allgemeine Flächennachbarformel.

Zu unterscheiden sind der geometrische Nachbar im impliziten Gitter und das tatsächlich vorhandene Blatt. Bei einem vollständig konformen Tetraedergitter hat jede innere aktive Fläche genau einen Gegenpartner mit derselben ganzen Fläche. Werden hängende Flächen zugelassen, entsteht stattdessen eine Liste von Teilflächen mit eigener Flussbilanz. Für die erste Version wird ausdrücklich die konforme Variante empfohlen.

In 2D konnte der Abschluss mit den hergeleiteten Partnerregeln behandelt werden. In 3D muss geprüft werden, ob die Teilungen auf beiden Seiten einer Fläche dieselbe Flächentriangulation erzeugen und ob weitere Kantenkonfigurationen Folgeanforderungen auslösen. Volumenhalbierung allein beweist weder Terminierung noch Formregularität oder einen beherrschbaren Zusatzaufwand des Abschlusses.

Auch die parallele Vereinigungsregel aus Kapitel 5 darf nicht ungeprüft übernommen werden. Monotonie und Idempotenz eines Abschlussoperators C genügen nicht für $C(A \cup$

$B) = C(A) \cup C(B)$. Die abstrakte Regel *erst wenn a und b vorliegen, füge c hinzu* liefert ein Gegenbeispiel. Für den gewählten 3D-Abschluss muss die nötige Eigenschaft erneut aus seinen tatsächlichen Regeln bewiesen werden. Das ist eine mathematische Entwicklungsaufgabe, keine blosse Threadoptimierung.

10.4. Hydrodynamik und Gravitation in 3D

10.4.1. Der Hydrooperator: bekannte Struktur, neue Geometrie

Der konservative Zustand wächst von vier auf fünf Komponenten:

$$U = (\rho, m_x, m_y, m_z, E)^T, \quad p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{|m|^2}{2\rho} \right). \quad (10.5)$$

Die Flussbilanz über vier Dreiecksflächen lautet

$$\frac{d\bar{U}_K}{dt} = -\frac{1}{V_K} \sum_{f \in \partial K} |f| \hat{F}_f + S_K. \quad (10.6)$$

Gemeinsame orientierte Flüsse und zellweises Einsammeln bleiben erhalten. In Normalenrichtung gibt es jetzt zwei Tangentialgeschwindigkeiten; die fünf Euler-Wellengeschwindigkeiten sind $u - c, u, u, u, u + c$. Der HLLC-Entwurf ist damit relativ gut übertragbar, doch Normalen, tangentielle Basis und Vorzeichen benötigen neue Kontrollen.

Die Rekonstruktion bestimmt drei Gradientenkomponenten. Ihr Stencil muss Rang drei besitzen; eine blosse Anzahl von Nachbarn garantiert das nicht. Flächen-, Kanten- und Ecksterne sind topologisch verschieden. Die einfache zweidimensionale Umlaufvorstellung und die dort verwendete Schranke von acht Eckzellen werden nicht ungeprüft übertragen. Quadraturpunkte auf Flächen, Begrenzer und Positivitätsskalierung müssen zusammenpassen. Der Flächenschwerpunkt ist ein sinnvoller Ausgangspunkt für eine glatte Approximation zweiter Ordnung, aber keine exakte Quadratur eines nichtlinearen Eulerflusses.

Bei der expliziten CFL-Wahl ist eine geometrisch passende Grösse $V_K / \sum_f |f| a_f$ wichtiger als $V_K^{1/3}$ allein. Sehr schlechte Elementformen können kleine Zeitschritte erzwingen. Deshalb ist Formkontrolle eine Voraussetzung für Genauigkeit *und* Performance.

10.4.2. Das Gravitationsmodell ändert sich physikalisch

Die heutige Massenschicht ist nicht einfach um eine Koordinate zu ergänzen. In 3D ist ρ Volumendichte, und für isolierte Newton-Gravitation gelten

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad \Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} dV_y. \quad (10.7)$$

Eine Baumapproximation der Integralform kann weiterhin verwendet werden. Aggregierte Massen, drei Schwerpunktkoordinaten und räumliche Begrenzungsboxen sind algorithmisch überschaubare Erweiterungen. Die schwierige Frage bleibt die Genauigkeit von Nahfeld, Zellselbstenergie und Quellenarbeit. Ein fester Plummerkern definiert wiederum ein regularisiertes Modell, nicht die unmodifizierte Poissongleichung. Eine an die Zellgrösse gekoppelte Glättung verlangt zusätzliche Konsistenzarbeit bei Kraft, Energie und Gitterwechsel.

Für Kollisionen ist ausserdem Drehimpuls wesentlich. Konservativer Impulsaustausch allein garantiert auf einem allgemeinen Zellgitter keine exakte Erhaltung des aus Zellschwerpunkten berechneten Drehimpulses. Erhält die rechte Zelle den Impulsbeitrag $\mathbf{J}$ und verliert die linke denselben, so ist der Beitrag zur diskreten Drehimpulsänderung

$$\Delta \mathbf{L} = (\mathbf{x}_R - \mathbf{x}_L) \times \mathbf{J}, \quad (10.8)$$

der im Allgemeinen nicht verschwindet. Baumkräfte liefern weitere Approximationsanteile. Die Entwicklung von Rotation oder Auswurf darf deshalb nicht allein aus guter Massenbilanz für zuverlässig erklärt werden.

10.5. Grobe Aufwands- und Risikoabschätzung

Die Einstufung in Tabelle 10.1 ist eine technische Einschätzung, keine gemessene Zeitprognose. *Gering* meint eine lokale Erweiterung mit weitgehend bekannter Struktur, *mittel* mehrere gekoppelte Module und *hoch* offene geometrische oder numerische Entwurfsentscheidungen. Eine belastbare Kalenderplanung ist erst nach Wahl der 3D-Bisektionsfamilie möglich.

Tabelle 10.1.: Übertragbarkeit und erwartete Schwierigkeiten. Keine Zeile bezeichnet bereits abgeschlossene 3D-Arbeit.

Teilaufgabe	Risiko	Begründung
Eltern, Kinder, Präfix	gering	Dieselbe binäre Baumalgebra; Wurzelidentität ergänzen.
Zustand und HLLC	mittel	Eine Impulskomponente mehr; zwei Tangentialrichtungen und Flächenbilanz.
Massenaggregation	gering	Gleiche Reduktion, zusätzliche Koordinate; Wiederverwendung der Parallelstrategie.
Bit-Geometriedecoder	hoch	Typen, Orientierung, Wortbreite und exakte Referenz neu festlegen.
Flächennachbarn	hoch	Zustands- und Wurzelübergänge sowie adaptive Blattauflösung.
Konformer Abschluss	hoch	Kompatibilität, Terminierung, Formklassen und Parallelisierbarkeit neu absichern.
Rekonstruktion	mittel bis hoch	Räumliche Sterne, Rang und Begrenzung auf Flächen.
AMR plus Gravitation	hoch	Schon in 2D offener Energie- und Transfervertrag; keine reine Dimensionsfrage.
Speicher und I/O	mittel	Bewährte Arrays und Checkpoints, aber deutlich grössere Datenmengen.
Forschungsmodell	hoch	Gleichgewicht, Randunabhängigkeit, Auflösung und passende Physik entscheiden die Nutzbarkeit.

Für gleichförmige Auflösung eines festen Gebiets folgt als reines Kostenmodell $N \propto h^{-D}$. Halbiert man h bei gleicher Signalgeschwindigkeit und expliziter CFL-Schrittwahl, verdoppelt sich zusätzlich die Schrittzahl. Für einen linearen Arbeitsaufwand je Schritt wächst die Arbeit daher um 2^{D+1} : Faktor acht in 2D und sechzehn in 3D. Eine Baumkraft fügt ihren eigenen Aufwand hinzu; adaptive Verfeinerung kann den Umfang reduzieren, garantiert dies aber nicht.

Ein einziges konservatives 3D-Zustandsarray mit fünf 64-Bit-Gleitkommazahlen benötigt bei einer Million Zellen 40 Millionen Byte, ungefähr 38.1 MiB. Dies ist eine Untergrenze eines einzelnen Feldes, keine RAM-Prognose: RK-Stufen, Gradienten, Flächen, Nachbarschaften, Baum, temporäre Daten und Ausgaben kommen hinzu. Eine pauschale Zusage für eine bestimmte Zellzahl auf dreihenden wäre ohne Messung nicht belastbar.

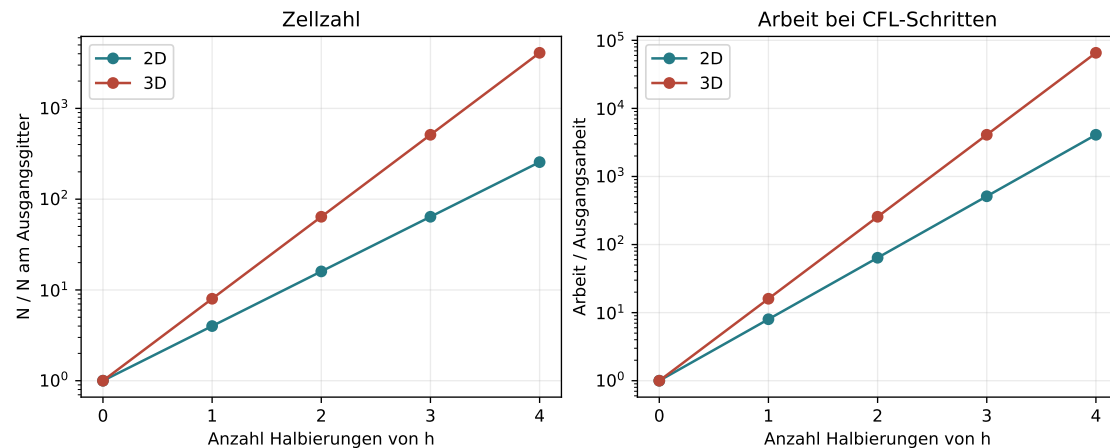


Abbildung 10.1.: Theoretische Skalierung bei wiederholter Halbierung der charakteristischen Zelllänge. Links Zellzahl, rechts Arbeit für feste physikalische Dauer bei linearem Aufwand je Schritt und CFL-Skalierung. Auf den jeweiligen Ausgangsfall normiert; keine Messung unserer Rechner und kein direkter Laufzeitvergleich zwischen einem 2D- und einem 3D-Code.

10.6. Ein schrittweiser 3D-Entwicklungsweg

Der Übergang sollte vier abgegrenzte Arbeitsstände erzeugen:

1. **Geometrische Referenz.** Feste Teilungsfamilie, exakte Koordinaten, Nachbarn und Abschluss zunächst seriell. Volumenzerlegung, Flächenidentität, Orientierung und Wurzelübergänge müssen unabhängig vom Hydrosolver prüfbar sein. Danach erst native Optimierung und Threads.
2. **Konservativer Transport und Euler ohne Gravitation.** Konstante Felder, affine Rekonstruktion und bewegte Profile vor Schocks prüfen. Planare Stöße in mehreren Richtungen, Kontakttransport und eine sphärische Explosion ergänzen den Kern. Die 3D-Sedov-Skalierung hat $R \propto t^{2/5}$, nicht den zylindrischen Exponenten $1/2$.
3. **Selbstgravitation auf festem Gitter.** Direkte kleine Kraftreferenzen, hydrostatische Kugeln und kontrollierte Kollapsfälle vor Kollisionen untersuchen. Ruhe, radiale Schwingung, Energie und Drehimpuls über passende dynamische Zeiträume verfolgen.
4. **Gekoppelte Adaptivität und begrenzte Forschungsreihe.** Erst nach konservativem Transfer und kontrollierter Energieänderung bewegte Verfeinerung aktivieren.

Aus einer kleinen konvergierten Reihe entsteht dann eine Forschungsanwendung; ein Film folgt aus ihren Daten.

Eine realistische Planung umfasst somit mehrere eigenständige Entwicklungs- und Prüfzyklen, nicht lediglich das Ergänzen von z in den vorhandenen Datenstrukturen. Der geometrische Prototyp entscheidet früh, ob die gewünschte Bitcodierung praktisch handhabbar bleibt.

10.7. Eignung für kleinere astrophysikalische Forschungsfragen

10.7.1. Bedingtes Ja für klar definierte Modelle

Die Einschätzung lautet **ja, grundsätzlich**, aber nicht als Behauptung über den heutigen 2D-Stand. Ein geprüfter 3D-Code für Newtonsche Selbstgravitation und kompressibles Gas kann eng begrenzte Fragen über idealisierte gasförmige Objekte untersuchen. Dazu braucht er nicht sofort Strahlungstransport, Magnetfelder und jede denkbare Zustandsgleichung. Er muss jedoch zeigen, dass die für die gewählte Frage ausgelassene Physik und die numerischen Fehler ihre Antwort nicht bestimmen. Dies ist eine projektspezifische Einschätzung, kein bereits erbrachter astrophysikalischer Validierungsnachweis.

Eine sinnvolle erste Objektfamilie wären nichtrotierende polytrope Gaskugeln mit $P = K\rho^{1+1/n}$. Die sphärischen Gleichgewichte erfüllen

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2}. \quad (10.9)$$

Im Unterschied zur heutigen ebenen Schicht ist die eingeschlossene Masse hier für die radiale Kraft ausreichend. Hydroprofil und dynamische Zustandsgleichung müssen konsistent sein: Für ein anfänglich isentropes ideales Gas gilt $\gamma = 1 + 1/n$. Die Existenz eines Gleichgewichts ist noch kein Stabilitätsnachweis. Projektion, Hintergrundgas und Gitter können es zusätzlich stören; eine Relaxation verändert den Zustand und muss als eigener Vorbereitungsschritt dokumentiert werden.

10.7.2. Drei überschaubare Forschungsrichtungen

1. **Anregung einer selbstgravitierenden Gaskugel.** Bei festem Profil eine kleine definierte Störung variieren und Schwingungsfrequenz, Modenstruktur sowie Energieaustausch messen. Numerische Dämpfung ist zunächst ein Kontrollproblem; ohne physikalischen Dämpfungsmechanismus darf sie nicht als gemessene reale Viskosität gelten.

2. **Kollision zweier idealisierter polytroper Objekte.** Bei festem Massenverhältnis nur Stossparameter oder Geschwindigkeit variieren. Interessant sind gebundener Rest, ausgeworfene Masse, Rotationsanregung und zeitliche Relaxation. Auswurf benötigt eine nachvollziehbare Definition und eine hinreichend späte Auswertung; ein momentan positives spezifisches Energieetikett in einem veränderlichen Potential ist kein endgültiger Fluchtnachweis.
3. **Hydrodynamischer Impaktor auf eine grössere Gaskugel.** Zunächst einen ebenfalls gasförmigen kleinen Körper verwenden und Energieablagerung sowie grossräumige Antwort untersuchen. Die Bezeichnung Komet–Jupiter bleibt eine Inspiration. Materialfestigkeit, Ablation, Chemie, Schichtung und Strahlung eines realen Einschlags sind in diesem Minimalmodell nicht enthalten.

Für einen Kollisionsvergleich bieten sich dimensionslose Parameter an:

$$q = \frac{M_2}{M_1}, \quad \hat{b} = \frac{b}{R_1 + R_2}, \quad \hat{v} = \frac{v_{\text{rel}}}{\sqrt{2G(M_1 + M_2)/(R_1 + R_2)}}. \quad (10.10)$$

b und v_{rel} müssen dabei für eine klar benannte Anfangs- oder Begegnungssituation definiert werden; ein Stossparameter im Unendlichen ist nicht einfach der anfängliche Querabstand zweier bereits gravitativ wechselwirkender Körper. Am Anfang sollte nur ein Parameter variiert werden. Eine kleine nachvollziehbare Reihe ist wertvoller als eine grosse, aber unaufgelöste Karte des Parameterraums.

10.7.3. Wann die Antwort wissenschaftlich belastbar wird

Vor einer physikalischen Schlussfolgerung sind mindestens ein ungestörter Kontrolllauf, eine Raum- und Zeitauflösungsstudie, eine Randkontrolle und ein Audit von Masse, Energie und Drehimpuls nötig. Die Abhängigkeit von Baumöffnung und Glättung wird getrennt angegeben. Ein Vergleich mit einem unabhängigen Referenzcode oder einer analytisch zugänglichen Teilfrage ist besonders wertvoll. Reproduzierbare Eingaben, Auswertungsdefinitionen und archivierte Versionen gehören zum Ergebnis.

Bei Fragmentation kommt eine zusätzliche Auflösungsbedingung hinzu. Die linearisierte homogene isotherme 3D-Analyse liefert die Jeanslänge $\lambda_J = c_s \sqrt{\pi/(G\rho)}$. Truelove et al. fanden für ihre Gitterrechnungen die Notwendigkeit, diese Skala mit mindestens ungefähr vier Zellen aufzulösen; dies ist keine hinreichende Konvergenzgarantie [23]. Für unsere adaptiven Tetraeder muss eine geeignete lokale Längenskala und erforderliche Auflösung eigens geprüft werden. Die Zahl vier wird nicht als universelles Gütesiegel übernommen.

Eine Rechnung mit idealem Gas kann keine präzisen Aussagen über reale Sternentwicklung, nukleare Energiefreisetzung, radiative Abkühlung oder relativistische kompakte Objekte

beanspruchen. Umgekehrt ist ein idealisiertes Problem nicht wissenschaftlich wertlos: Es kann den Einfluss einer klar kontrollierten Ursache innerhalb eines expliziten Modells untersuchen. Die Neuheit der jeweiligen Frage muss unabhängig von der Eigenentwicklung des Codes literarisch geklärt werden.

10.8. Entscheidungskriterium für die erste 3D-Studie

Der Übergang zu einer physikalischen Studie sollte erfolgen, sobald ein passender Gleichgewichtskontrolllauf vorliegt und der numerische Fehler unter dem zu untersuchenden Effekt liegt. Die kritischen Voraussetzungen sind 3D-Bitgeometrie, konformer Abschluss, ausreichende lokale Auflösung und kontrollierte Hydro-Gravitations-Energie. Die Gesamtbewertung der bisherigen Arbeit folgt in Kapitel 11.

Herkunft und Beitrag: Die Rangfolge Technik vor Tests vor Demonstrationen, der langfristige 3D-CFK-Code und die Kollisions- und Selbstgravitationsfragen stammen vom Autor. Die Arbeitspakete, Risikoeinstufung und bedingte Nutzbarkeitsbewertung wurden von ChatGPT aus dem dokumentierten 2D-Stand und den genannten Primärquellen entwickelt.

11. Fazit und Einordnung

11.1. Antwort auf die Forschungsfrage

Im Dialog mit ChatGPT wurden Geometrie, Teilchendynamik und ein zweidimensionaler Hydro-Prototyp ausgearbeitet und an Referenzproblemen geprüft. Die Fallstudie zeigt vor allem eine eng verzahnte Arbeitsteilung: Der Autor bestimmte Fragen und Randbedingungen; die Assistenz übernahm wesentliche Teile von Implementierung, Versuchsorganisation und Auswertung.

Wie viel Entwicklungszeit dadurch eingespart wurde, bleibt mangels vergleichbarer Gegenprobe und vollständiger Zeitprotokolle offen (Abschnitt 9.5). Der Vergleich mit der früheren Diplomarbeit ist daher ein persönlicher Ausgangspunkt, kein gemessener Produktivitätsfaktor.

11.2. Was erreicht wurde

Die stärkste mathematische Grundlage betrifft die festgelegte zweidimensionale Bisektionsgeometrie. Integer-Pfade identifizieren die Zellen; Geometrie und gleich tiefe Nachbarn lassen sich daraus deterministisch rekonstruieren. Der konforme Abschluss ist über explizite Abhängigkeiten beschreibbar. Seine Struktur ermöglicht den untersuchten parallelen Aufbau durch Vereinigung. Diese Aussagen sind enger und belastbarer als die allgemeine Behauptung eines neuen universellen Gitterverfahrens.

Auf dieser Grundlage wurden gravitative Teilchenrechnungen und ein zweidimensionaler Hydro-Prototyp entwickelt. Die Entwicklung umfasst numerische Riemannflüsse, begrenzte lineare Rekonstruktion mit Ecknachbarn, konservative Transfers und native parallele Operatoren. Die Testreihen in Kapitel 8 zeigen Verbesserungen der Schockdarstellung, konservative Transfers und numerisch übereinstimmende parallele Läufe für die untersuchten Fälle.

Die Selbstgravitation des Gases ist der Übergang von einzeln geprüften Bausteinen zu einer empfindlichen Kopplung. Die Unterscheidung zwischen positiver innerer Energie, korrekter Kraft, ausgeglichener Ruhelage und guter Gesamtenergiebilanz erwies sich als

wesentlich. Das heutige Ergebnis ist deshalb ein Forschungsprototyp mit dokumentierten Gültigkeitsgrenzen, nicht ein für beliebige astrophysikalische Anwendungen freigegebener Code.

11.3. Was nicht abgeschlossen ist

Insbesondere bleiben die Qualität der gravitativen Zellquadratur, langfristige Gleichgewichtserhaltung, konsistente Energiebehandlung bei Gitterwechseln sowie der robuste Übergang nach 3D offen. Die zugehörigen Arbeitspakete sind in Kapitel 10 priorisiert. Noch laufende oder durch Zeitbudgets begrenzte Reihen dürfen nur bis zu ihren tatsächlich gesicherten Zeiten interpretiert werden. Der Umfang einer geplanten Reihe ist kein Ergebnis.

Vor einer Veröffentlichung sind ausserdem die Reproduktions- und Freigabeschritte aus Anhang B abzuschliessen.

11.4. Rollen und wissenschaftliche Verantwortung

Die Fallbeispiele in Kapitel 9 zeigen, wo die fachlichen Rückfragen des Autors den Weg änderten: bei der Schockauflösung, der Gravitationskopplung und der Bewertung der Parallelisierung. Die Assistenz konnte diese Einwände in neue Implementierungen und Versuche übersetzen. Deren Beurteilung erforderte weiterhin unabhängige Referenzen und fachliche Entscheidungen. Für die weitere Arbeit empfiehlt sich deshalb das dort vorgeschlagene Entscheidungsprotokoll (Abschnitt 9.10).

11.5. Einordnung und Perspektive

Als nächstes zählt deshalb nicht die grösstmögliche Demonstration, sondern die Stabilisierung der technischen Grundlagen mit begleitender Verifikation. Darauf folgen systematische Tests und erst danach weitere Demonstrationen. Eine spätere kleine 3D-Studie wäre wissenschaftlich interessant, wenn ihr numerischer Fehler nachweislich kleiner als der untersuchte Effekt ist und ihr physikalisches Modell die gestellte Frage trägt. Das ist ein realistisches Entwicklungsziel, aber kein bereits erbrachtes Ergebnis.

Herkunft und Beitrag: Dieses Fazit wurde von ChatGPT als Synthese der dokumentierten Ergebnisse und Autorenfragen formuliert. Es ist keine persönliche Erfahrungsausserung des Autors und bedarf vor Veröffentlichung seiner inhaltlichen Freigabe.

A. Register der Ideen und Entscheidungen

A.1. Zuordnungsregeln

Dieses Register ergänzt die Fallanalyse aus Kapitel 9. Es unterscheidet Anregung des Autors, Vorschlag von ChatGPT, Literaturmethode und gemeinsame Ausarbeitung. Bei unvollständigem Gesprächsbeleg bleibt die Zuordnung offen.

Gegenstand	Gegenwärtiger Herkunftsbeleg
Wurzel 1, halbes Quadrat, Integer-Geometrie	Explizite Nachrichten des Autors.
Maximal ein Teilchen pro Blatt	Explizite Präzisierung des Autors.
Gauss-/Mehrzentren-Experimente	Anregungen des Autors, Detailplanung gemeinsam.
Barnes-Hut	Originalliteratur; CFK-Verbindung vom Autor gewünscht.
Ecknachbarn für Rekonstruktion	Explizite Nachfrage des Autors.
Roe, MUSCL	Literatur; vom Autor aus früherer Arbeit eingebracht.
Experimenteller Gravitationskick	Vorschlag und Umsetzung durch ChatGPT nach Zustimmung.
Beschleunigungs-Fallstudie	Forschungsziel des Autors.

A.2. Nachprüfbare Gesprächsanker

Tabelle 9.1 enthält die Suchanker der analysierten Entscheidungen. Ergänzend betreffen die folgenden Äusserungen offene Aufgaben und die redaktionelle Priorisierung:

Suchanker	Belegte Rolle
„die nachbarn bei den Ecken“	Nachfrage zur Rekonstruktion mit Zellen ohne gemeinsame Kante.

Suchanker	Belegte Rolle
„mit hilfe vom Baum, unterschiedliche Zeitschritte“	Idee individueller Schrittweiten; keine bereits erteilte wissenschaftliche Freigabe einer solchen Methode.
„Bitgeometrie untersuchen“	Expliziter Auftrag für den Ideenspeicher; Optimierung als offene Untersuchung.
„technische weiterentwicklungen ganz klar Vorrang“	Prioritätsvorgabe Technik vor Tests vor Demonstrationen.

Orthographische Besonderheiten der wörtlichen Suchanker bleiben erhalten. Ein Export soll künftig stabile Nachrichtenkennungen an die Stelle solcher Suchhilfen setzen.

A.3. Zuordnung ohne Scheingenaugkeit

Für jede wichtige Entscheidung ist ein Datensatz aus vier Teilen sinnvoll: ursprüngliche Frage, vorgeschlagene Lösung, Zustimmung oder Korrektur sowie tatsächlich realisierter Quell- und Versuchsstand. Ein Vorschlag kann aus der Literatur stammen, von ChatGPT ausgewählt und durch den Autor angeregt worden sein. Diese Rollen widersprechen sich nicht. Die Bezeichnung *gemeinsame Ausarbeitung* soll sie zusammenfassen, nicht ihre Unterschiede verdecken.

Die Herkunftsangaben am Ende der Fachkapitel verwenden diese Rollen. Der Literaturvergleich zur CFK-Konstruktion steht in Abschnitt 9.9.2.

A.4. Offene Ideen und unerledigte Aufträge

Der projektweite Ideenspeicher IDEEN.md hält nicht sofort bearbeitete Punkte fest. Ein Eintrag soll Ursprung, kurze Fragestellung, Relevanz, Abhängigkeiten und Bearbeitungsstand enthalten. Nachträglich im Gespräch gefundene Ideen werden als solche markiert und nicht mit einer neuen aktuellen Zustimmung verwechselt. Beispiele sind Bitgeometrieoptimierung, individuelle Zeitschritte, differenzierte Ausgabeformate und spätere Impaktdemonstrationen.

Eine dokumentierte Idee ist weder ein Ergebnis noch eine automatische Erlaubnis für einen ressourcenintensiven Versuch. Die technische Priorisierung erfolgt in Kapitel 10; eine spätere Änderung dieser Priorisierung soll wiederum mit ihrer Begründung festgehalten werden.

A.5. Noch fehlende Belege

Ein vollständiger Gesprächsexport, unveränderliche Nachrichtenkennungen und die Zuordnung sämtlicher historischer Quellstände sind noch nicht Teil eines unabhängig geprüften Veröffentlichungsarchivs. Die vorliegende Zuordnung ist deshalb dort vorläufig, wo nur eine retrospektive Zusammenfassung vorliegt. Insbesondere wird keine lückenlose Urheberschaft auf Ebene einzelner Codezeilen behauptet.

B. Reproduzierbarkeit und Publikation

B.1. Erforderliche Artefakte

Für eine Messreihe müssen Eingaben, Rechenumgebung, Ergebnis und Auswertung eindeutig zusammengehören. Das Manifest in Abschnitt B.4 legt die erforderlichen Angaben fest.

B.2. Code im Buch und Code zur Arbeit

Pseudocode erklärt Algorithmen, ersetzt aber nicht den ausführbaren Reproduktionsstand. Empfohlen wird ein bereinigtes öffentliches Begleitrepository mit kleinen Tests und Datenmanifesten. Private Pfade, SSH-Ziele und fremde Literatur-PDFs gehören nicht in dieses Repository. Code- und Textlizenz werden erst nach ausdrücklicher Entscheidung des Autors festgelegt. Abhängigkeiten und Abbildungen benötigen eine Rechteprüfung.

B.3. Bearbeitbare Kapitel

Die Datei `main.tex` bindet alle Kapitel einzeln ein. Literatur und spätere Ergebnisgrafiken bleiben getrennt. Die Arbeit lässt sich mit `latexmk -pdf main.tex` bauen; ein automatischer lokaler Neubau bei Änderungen ist mit `latexmk -pdf -pvc main.tex` möglich. Die Arbeitsfassung darf nicht als abgeschlossene, begutachtete Studie weitergegeben werden.

B.4. Ein minimales Versuchsmanifest

Ein Manifest muss die Bedeutung seiner Felder dokumentieren. Folgendes Schema beschreibt erforderliche Informationen und ist ausdrücklich kein ausgefülltes Manifest eines neuen Versuchs:

```
run_id, parent_run_id
source_revision, source_archive_sha256, solver_sha256
model, units, equation_of_state, boundaries
initial_state_sha256, seed, grid_rule, grid_depths
integrator, cfl, gravity_kernel, epsilon, theta
compiler, flags, libraries, machine, threads
requested_end_time, wall_time_limit
actual_end_time, stop_reason
checkpoint_sha256, output_manifest, analysis_revision
```

Bei einer Fortsetzung ist die Prüfsumme des übernommenen Zustands mit derjenigen des vorherigen Endzustands abzugleichen. Ein Hash bestätigt Byteidentität, nicht physikalische Richtigkeit. Für plattformübergreifende Vergleiche sind zusätzlich definierte Normen und Toleranzen nötig.

B.5. Reproduktion in drei Stufen

1. **Kleine Referenzen:** Geometrie, Nachbarn, konformer Abschluss, Flussorientierung und Zustandsübertragung auf kleinen Gittern prüfen. Fehler sollen hier mit überschaubaren Eingaben lokalisierbar sein.
2. **Archivierte numerische Fälle:** Den dokumentierten Quellstand mit identischen Eingaben ausführen. Bilanzdefinitionen, Messzeitpunkte und Auswertung unverändert verwenden. Abweichungen protokollieren, nicht durch stillschweigende Parameteränderung beseitigen.
3. **Unabhängige Kontrolle:** Ausgewählte Aussagen mit anderem Referenzverfahren oder durch eine andere Person prüfen. Eine erneute Ausführung desselben fehlerhaften Programms wäre kein unabhängiger Beweis.

Ein abgebrochener Lauf bleibt als solcher archiviert. Ein späterer erfolgreicher Lauf ersetzt ihn nicht in der historischen Darstellung.

B.6. Daten, Zwischenstände und Bilder

Restart-Daten enthalten den vollständigen numerischen Zustand in der benötigten Präzision. Reduzierte Felder für Animationen sind davon getrennt. Eine gröbere Zeitabtastung kann kurze Ereignisse verdecken; eine geringere Zahlendarstellung kann Bilanzmessungen

verfälschen. Ausgabeentscheidungen müssen deshalb zum jeweiligen Auswertungsziel passen.

Für jede Abbildung werden Datenquelle, Auswahlzeit, dargestellte Grösse, Skala, Ausschnitt und Erzeugungsskript dokumentiert. Bei Vergleichen sind gleiche Farbskalen und gleiche physikalische Zeiten vorzuziehen. Interpolation und Glättung gehören in die Bildlegende, sofern verwendet. Ein Film enthält keine zusätzliche zeitliche Evidenz, nur weil derselbe Zustand über mehrere Bilder angezeigt wird.

B.6.1. Bildnachweis der Titelseite

Das Titelmotiv wird aus `positions.npy.zst`, `groups.npy` und `times.npy` der archivierten Reihe `Berichte/2026-09-17/Galaxy_Demo/main` erzeugt. Dargestellt ist Ausgabeindex 185, ohne Interpolation oder Veränderung der Teilchenpositionen. Die Farben kennzeichnen die beiden ursprünglichen Gruppen; weisse Punkte bezeichnen ihre massiven Kerne. Der Bildausschnitt enthält alle Teilchen dieses Zustands bei gleichen Massstäben in beiden Richtungen. Das Motiv zeigt ein vereinfachtes Teilchenmodell zweier rotierender Scheiben, keine realistische Galaxienrechnung und kein hydrodynamisches Gas. Die Titelseite nutzt das Bild zur Darstellung des Entwicklungsgegenstands, nicht als zusätzlichen Validierungsnachweis.

B.7. Freigabe für eine Veröffentlichung

Vor einer öffentlichen Fassung sind mindestens die folgenden Punkte abzuschliessen: inhaltliche Freigabe durch den Autor, bibliographische Kontrolle, Rechteklärung der Abbildungen, Auswahl und Lizenzierung des Begleitcodes, Entfernung privater Zugangsdaten sowie eine reproduzierbare Minimalinstallation. Fremde Literatur-PDFs werden nicht mitveröffentlicht. Pseudocode in Anhang C hilft beim Verständnis, ersetzt jedoch weder die Quellenlizenz noch den ausführbaren Reproduktionsstand.

Freigegebene Fassungen benötigen Version, Datum und Änderungsliste. Dies sind noch abzuarbeitende Publikationsanforderungen.

C. Zentrale Algorithmen

Dieser Anhang beschreibt den implementierten zweidimensionalen Kern in sprachunabhängigem Pseudocode. Er ist eine Lesehilfe, kein Ersatz für den archivierten Quellstand. Fehlerbehandlung, Speicherverwaltung und einzelne Optimierungen sind verkürzt; mathematisch relevante Reihenfolgen und Zustandsprüfungen bleiben ausdrücklich erhalten. Die Quellpfade sind relativ zum Verzeichnis CFK angegeben. Die Verfahren dieses Anhangs sind keine bereits realisierte 3D-Konstruktion.

C.1. Adresse und exakte Geometrie

Eingabe: positive Ganzzahl k . **Ausgabe:** geordnete Ecken des zugehörigen Dreiecks. Die führende Eins bezeichnet die Wurzel; die übrigen Bits sind der Weg zu ihren Nachkommen. Die Reihenfolge der Ecken ist Bestandteil der Definition, nicht eine frei wählbare Darstellung.

```
GEOMETRIE(k):  
  fordere k >= 1  
  (A,B,C) <- ((0,0),(2,0),(0,2))  
  fuer jedes Pfadbit b nach der fuehrenden Eins:  
    M <- (B+C)/2  
    falls b == 0: (A,B,C) <- (M,A,B)  
    sonst: (A,B,C) <- (M,C,A)  
  liefere (A,B,C)
```

Zuweisungen eines Tupels erfolgen gleichzeitig. Mit rationaler dyadischer Arithmetik ist dieser Decoder exakt. Die Tiefe ist $d = \text{bitlength}(k) - 1$, die Fläche 2^{1-d} . Elterncode und Kinder sind $k \gg 1$ beziehungsweise $2k, 2k + 1$. In C++ ist vor einer weiteren Verfeinerung die Wortbreite zu prüfen. **Quellen im Projekt:** 2D/geometry.py, CPP/include/cfk/code.hpp. Der Decoder benötigt $O(d)$ Schritte; die Kosten beliebig grosser Ganzzahlen sind darin nicht enthalten.

C.2. Nachbar aus dem Bitpfad

Lokale Kanten sind $0 = BC$, $1 = CA$, $2 = AB$. Das Ergebnis ist der Nachbar im impliziten Gitter gleicher Tiefe, nicht zwingend ein aktives Blatt.

```
NACHBAR(k,e):
  fordere k >= 1 und e in {0,1,2}
  stapel <- leer
  solange k != 1:
    b <- k AND 1
    geschwisterkante <- (2 falls b==0, sonst 1)
    falls e == geschwisterkante:
      n <- k XOR 1
      f <- (1 falls b==0, sonst 2)
      gehe zu ABSTIEG
    ganz <- (e == 0)
    lege (ganz,b) auf stapel
    e <- ((2 falls b==0, sonst 1) falls ganz, sonst 0)
    k <- k >> 1
  liefere RAND
ABSTIEG:
  solange stapel nicht leer:
    (ganz,b) <- entnimm obersten Eintrag
    falls ganz:
      n <- 2*n + (1 falls f==1, sonst 0)
      f <- 0
    sonst:
      n <- 2*n + (1-b)
      f <- (2 falls b==0, sonst 1)
  liefere n
```

Der Aufstieg sucht eine Geschwisterschnittstelle; der Abstieg verfolgt die gemeinsame Kante in umgekehrter Orientierung. Laufzeit und Stapel sind linear in der Tiefe. Für das adaptive Netz muss anschliessend anhand der vorhandenen Baumknoten bestimmt werden, welcher aktive Nachbar die Kante trägt. Ein unkontrolliertes Verwenden des zurückgegebenen Codes als Zellindex wäre falsch. **Quelle:** 2D/geometry.py:neighbor.

C.3. Konformer Abschluss als Arbeitsliste

Eingabe: vorhandene vollständige Knotenmenge N und gültige Teilungswünsche S .
Ausgabe: kleinster ergänzter konformer Baum für die hier verwendete Hierarchie. Zuerst wird geplant, dann verändert.

```
ABSCHLUSS(N,S):
  offen <- Liste(S); teilen <- leere Menge
  solange offen nicht leer:
    k <- entnimm(offen)
    falls k in teilen oder 2*k in N: weiter
    fuege k zu teilen hinzu
    falls k nicht in N: fuege k>>1 zu offen hinzu
    h <- NACHBAR(k,0)
    falls h != RAND: fuege h zu offen hinzu
  fuer k in sortiert(teilen):
    fuege 2*k und 2*k+1 zu N hinzu
  liefere N
```

Der vorhandene Baum muss die Invarianten bereits erfüllen. Elternpflichten verringern die Tiefe; Hypotenusenpartner erhalten sie. Dies begrenzt die Arbeitsliste auf eine endliche Menge. Ein Mengeneintrag verhindert Mehrfachbearbeitung. **Quelle:** 2D/tree.py:_refine_codes.

C.3.1. Parallele Konstruktion durch Vereinigung

Die Teilchenpräfixe liefern Teilungswünsche. Die Jobs dürfen ihren Konformitätsabschluss über die Grenze ihres Teilchenpakets hinaus bilden.

```
PARALLELER_TEILCHENBAUM(P):
  zerlege grosse Teilchenpakete durch Praefixteilungen
  merke dabei die groben Teilungswuensche S0
  N <- ABSCHLUSS({1},S0)
  parallel fuer jedes verbleibende Paket j:
    Sj <- Teilungen bis hoechstens ein Teilchen pro Blatt
    Nj <- ABSCHLUSS({1},Sj)
  fuer jedes fertige Nj: N <- Vereinigung(N,Nj)
  liefere N
```

Hier rechtfertigen die einzelnen Eltern- und Partnerimplikationen die Vereinigung abgeschlossener Mengen (Kapitel 5). Dies ist keine allgemeine Eigenschaft beliebiger Gitterabschlüsse. Zusammenfallende Teilchen und Tiefengrenzen benötigen die im ausführbaren Programm vorgesehenen Abbruchregeln. **Quelle:** 2D/particles_distributed.py. Dieser Prozessansatz ist implementiert; seine native C++-Übertragung bleibt ein Arbeitspaket. Vorzerlegung und abschliessende Vereinigung sind im beschriebenen Ansatz nicht vollständig parallel.

C.4. Lineare Rekonstruktion mit Ecksternen

Eingabe: zulässige konservative Zellmittel U_i , vorbereitete Gewichte und Ecksterne.
Ausgabe: begrenzte Gradienten G_i . Die Gewichte repräsentieren die geometrische Ausgleichsrekonstruktion.

```
parallel fuer jede Zelle i:
  G <- Summe_j W_ij * (U_j-U_i)
  fuer jede konservative Komponente c:
    theta_c <- 1
    fuer jede Ecke v der Zelle:
      [L,H] <- Wertebereich von U_c im Eckstern inkl. i
      delta <- G_c Punkt (v-x_i)
      reduziere theta_c so, dass
        L <= U_i,c + theta_c*delta <= H
    G_c <- theta_c * G_c
  falls Eckzustaende nicht positiv zulaessig:
    suche alpha in [0,1] durch Bisektion,
      so dass alle U_i + alpha*G*(v-x_i) zulaessig sind
  G <- alpha * G mit kleinem Sicherheitsabstand
  speichere G_i <- G
```

Die native Fassung rekonstruiert konservative Komponenten, nicht einfach primitive Variablen. Die zusätzliche gemeinsame Skalierung schützt Dichte und Druck; sie ändert nicht das Zellmittel. Positive Rekonstruktionswerte allein garantieren noch keinen positiven Zeitfortschritt. **Quellstelle:** CPP/src/hydro.cpp:reconstruct.

C.5. Flüsse, Zeitfortschritt und Rückweisung

Für eine orientierte innere Kante wird genau ein Fluss gespeichert. Beide angrenzenden Zellen verwenden ihn mit entgegengesetztem Vorzeichen.

```
HYDRO_OPERATOR(U):
  rekonstruiere und begrenze zellweise (bei Ordnung 2)
  parallel fuer jede Kante e:
    bilde linken/rechten Zustand am Kantenmittelpunkt
    bilde am Rand den vorgegebenen Randzustand
    F_e <- gewaehlter Riemannfluss in Normalenrichtung
  parallel fuer jede Zelle i:
    L_i <- -Summe_e Vorzeichen(i,e)*Laenge(e)*F_e / Flaeche(i)
  liefere L
```

```
ZEITSCHRITT(U,dt):
  U1 <- U + dt*L(U)
  falls U1 unzuverlässig: verwirfe den Versuch
  U2 <- (U + U1 + dt*L(U1))/2
  falls U2 unzuverlässig: verwirfe den Versuch
  falls dt die CFL-Grenze aus U1 verletzt: verwirfe den Versuch
  sonst akzeptiere U2
```

Die zweite Routine zeigt SSP-RK2 für den reinen Hydrooperator. Nach einer Rückweisung wird vom unveränderten Eingangszustand mit kleinerem Schritt neu versucht; die implementierten Versuchslimits bleiben verbindlich. CFL-Beschränkung, Randzeit und gewünschte Ausgabezeit sind vor jedem Versuch zu berücksichtigen. HLLC ist ein numerischer Riemannsolver, nicht der unmittelbar eingesetzte physikalische Fluss eines Zellmittels. Seine Zwischenzustände und Rückfallbedingungen sind in Kapitel 6 erklärt. **Quelle:** CPP/src/hydro.cpp:rhs, evolve.

C.6. Baumgravitation

```
AUFBAU:
  ordne Quellen ihren Blättern zu
  fuer Tiefen von unten nach oben:
    parallel pro Knoten: aggregiere Kindmassen und Momente
    synchronisiere vor der naechsten Tiefe
KRAFT(i):
  stapel <- Wurzel; a_i <- 0
  solange stapel nicht leer:
    k <- entnimm(stapel)
    falls k leer: weiter
    falls k Blatt:
      summiere direkte Beitraege ohne Selbstwechselwirkung
    sonst falls k Ziel i nicht enthaelt und MAC(k,i) erfuehlt:
      addiere Monopolbeitrag mit vereinbartem Gattungskern
    sonst: lege Kinder von k auf stapel
  liefere a_i
parallel fuer alle Ziele i: berechne KRAFT(i)
```

MAC bezeichnet das im gewählten Quellstand definierte Öffnungskriterium; seine geometrische Grösse darf nicht stillschweigend ausgetauscht werden. Bei Gasquellen ist $m_i = |K_i|\rho_i$ am Zellzentrum die gegenwärtige Punktquadratur, kein exaktes Zellintegral. Feste Kindreihenfolge und private Zielsummen erleichtern reproduzierbare parallele Berechnung. Der Aufwand hängt von Verteilung und Öffnung ab und ist nicht allgemein $O(N \log N)$ garantiert. **Quelle:** CPP/src/gravity.cpp.

C.7. Kick–Hydro–Kick

Für Impulsdichte $\mathbf{m}$, Dichte ρ und Energie E lautet ein Kick der Dauer τ :

$$\mathbf{m}' = \mathbf{m} + \tau \rho \mathbf{g}, \quad E' = E + \frac{|\mathbf{m}'|^2 - |\mathbf{m}|^2}{2\rho}.$$

Die innere Energie bleibt dabei in exakter Arithmetik unverändert.

```
VERSUCH(U,dt):  
  g0 <- Gravitation aus U  
  Ua <- KICK(U,g0,dt/2)  
  Ub <- zulässig geprüfter Hydrofortschritt von Ua um dt  
  g1 <- Gravitation aus Ub  
  Uc <- KICK(Ub,g1,dt/2)  
  falls irgendeine Stufe scheitert: gesamten Versuch verwerfen  
  sonst Uc akzeptieren und Quellenbilanz protokollieren
```

Der native Hydrofortschritt kann intern mehrere CFL-Schritte benötigen. Dies ist die experimentelle Kick-Kopplung auf festem Gitter, kein Beweis für exakte Erhaltung der Summe aus Gas- und potentieller Energie und kein Well-Balancing. Sie darf nicht mit den anderen experimentellen Energiekopplungen gleichgesetzt werden. **Quellstellen:** CPP/src/hydro.cpp:gravity_kick, CPP/docs/gravity_kick.md.

C.8. Konservative Übertragung zwischen Gittern

```
TRANSFER(altes Gitter, neues Gitter, U):  
  speichere alte Blattmittel nach Code  
  von unten nach oben:  
    Elternmittel <- (linkes Kindmittel + rechtes Kindmittel)/2  
  berechne bei linearer Verfeinerung begrenzte alte Gradienten  
  parallel fuer jedes neue Blatt k:  
    falls Mittel fuer k vorhanden: uebernehme es  
    sonst:  
      suche alten Blattvorfahren a durch Rechtsschieben  
      U_neu(k) <- U_alt(a)  
      falls linear: addiere G_a*(x_k-x_a)  
  pruefe Zulaessigkeit aller neuen Mittel
```

Die Mittelung mit 1/2 nutzt gleich grosse Geschwisterflächen. Für alle Nachkommen einer alten Zelle verschwindet die flächengewichtete Summe der Schwerpunktverschiebungen; deshalb erhält lineare Prolongation deren konservatives Integral bis auf Rundungsfehler.

Die Gitter müssen dieselbe Wurzel und einander kompatible Baumhierarchien besitzen.
Quelle: `CPP/src/hydro.cpp:transfer`. Dies erhält Masse, Impuls und Gasenergie, nicht automatisch die durch geänderte Quellenquadratur beeinflusste potentielle Energie. Die gemeinsame adaptive Hydro-Gravitations-Freigabe bleibt deshalb offen.

Herkunft und Beitrag: Die Pseudocodes wurden von ChatGPT aus den genannten Projektquellen abstrahiert. Sie dokumentieren die in den Hauptkapiteln zugeordneten Konstruktionen und Literaturmethoden; ihre Aufnahme begründet keinen zusätzlichen Neuheitsanspruch.

Literaturverzeichnis

- [1] R. M. Persiano, J. L. D. Comba und V. Barbalho: *An Adaptive Triangulation Refinement Scheme and Construction*. Manuskript, Laboratório de Computação Gráfica, COPPE/UFRJ, ohne auf dem vorliegenden Dokument gesichertes Erscheinungsjahr. Abschnitte 1–3. Dateiname `adptri93.pdf`; die Ziffern im Dateinamen werden nicht als bibliographischer Jahresnachweis verwendet. <https://graphics.stanford.edu/~comba/papers/adptri93.pdf>.
- [2] C. Burstedde und J. Holke: *A Tetrahedral Space-Filling Curve for Nonconforming Adaptive Meshes*. SIAM Journal on Scientific Computing 38, Nr. 5 (2016). <https://doi.org/10.1137/15M1040049>.
- [3] J. Barnes und P. Hut: *A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm*. Nature 324, 446–449 (1986). <https://doi.org/10.1038/324446a0>.
- [4] P. L. Roe: *Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes*. Journal of Computational Physics 43, 357–372 (1981). [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5).
- [5] J. E. Barnes: *Gravitational softening as a smoothing operation*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 425 (2012), 1104–1120. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21462.x>.
- [6] E. Hairer, C. Lubich und G. Wanner: *Geometric numerical integration illustrated by the Störmer–Verlet method*. Acta Numerica 12 (2003), 399–450. Autorenverzeichnis mit zugänglichem Manuskript: <https://www.unige.ch/~hairer/preprints.html>.
- [7] A. Toomre und J. Toomre: *Galactic bridges and tails*. Astrophysical Journal 178 (1972), 623–666. <https://doi.org/10.1086/151823>.
- [8] Python Software Foundation: *concurrent.futures: Launching parallel tasks*, Python-3.13-Dokumentation, Abschnitt ProcessPoolExecutor. <https://docs.python.org/3.13/library/concurrent.futures.html>.
- [9] OpenMP Architecture Review Board: *OpenMP Application Programming Interface, Version 5.1* (November 2020), Abschnitt 2.11.4, Worksharing-Loop Construct. <https://www.openmp.org/spec-html/5.1/openmpsu48.html>.

- [10] E. F. Toro, M. Spruce und W. Speares: *Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver*. Shock Waves 4 (1994), 25–34. <https://doi.org/10.1007/BF01414629>.
- [11] B. van Leer: *Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method*. Journal of Computational Physics 32 (1979), 101–136. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1).
- [12] T. J. Barth und D. C. Jespersen: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes*. AIAA Paper 89-0366 (1989). <https://ntrs.nasa.gov/citations/19890037939>.
- [13] S. Gottlieb, C.-W. Shu und E. Tadmor: *Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods*. SIAM Review 43 (2001), 89–112. <https://www.math.umd.edu/~tadmor/pub/linear-stability/Gottlieb-Shu-Tadmor.SIREV-01.pdf>.
- [14] X. Zhang und C.-W. Shu: *On positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for compressible Euler equations on rectangular meshes*. Journal of Computational Physics 229 (2010), 8918–8934. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.08.016>.
- [15] G. A. Sod: *A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*. Journal of Computational Physics 27 (1978), 1–31. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(78\)90023-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(78)90023-2).
- [16] J. R. Kamm und F. X. Timmes: *On Efficient Generation of Numerically Robust Sedov Solutions*. Los Alamos Report LA-UR-07-2849 (2007). <https://cococubed.com/papers/la-ur-07-2849.pdf>.
- [17] Clawpack-Projekt: *The Euler equations of gas dynamics, Approximate solvers for the Euler equations of gas dynamics* und Implementierung `riemann/euler_1D_py.py`. https://www.clawpack.org/riemann_book/html/Euler.html; https://www.clawpack.org/riemann_book/html/Euler_approximate.html; https://github.com/clawpack/riemann/blob/master/riemann/euler_1D_py.py.
- [18] G. Strang: *On the Construction and Comparison of Difference Schemes*. SIAM Journal on Numerical Analysis 5 (1968), 506–517. <https://doi.org/10.1137/0705041>.
- [19] P. D. Mullen, T. Hanawa und C. F. Gammie: *An Extension of the Athena++ Framework for Fully Conservative Self-Gravitating Hydrodynamics*. Manuskript (2020). <https://arxiv.org/abs/2012.01340>.
- [20] T. W. A. Müller, W. Kley und F. Meru: *Treating gravity in thin disk simulations*. Manuskript (2012). <https://arxiv.org/abs/1203.1413>.

- [21] R. Käppeli und S. Mishra: *A well-balanced finite volume scheme for the Euler equations with gravitation: the exact preservation of hydrostatic equilibrium with arbitrary entropy stratification*. Astronomy & Astrophysics 587 (2016), A94. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527815>.
- [22] J. M. Maubach: *Local Bisection Refinement for n-Simplicial Grids Generated by Reflection*. SIAM Journal on Scientific Computing 16, Nr. 1 (1995), 210–227. <https://doi.org/10.1137/0916014>.
- [23] J. K. Truelove, R. I. Klein, C. F. McKee, J. H. Holliman II, L. H. Howell und J. A. Greenough: *The Jeans Condition: A New Constraint on Spatial Resolution in Simulations of Isothermal Self-gravitational Hydrodynamics*. Astrophysical Journal 489 (1997), L179–L183. <https://doi.org/10.1086/310975>.